the general science journal

# Transformations de Lorentz Lafrénière
# Calculs relativistes

*Auteur :*
Simon FOSSAT

10 juillet 2023

Ce document est sous licence CC BY-NC-SA 4.0

# Déclaration de parenté

Je, soussigné Simon FOSSAT, déclare que cette publication de recherche indépendante « Transformations de Lorentz Lafrénière Calculs relativistes » est le fait de mon propre travail.

A propos de l'auteur :

Simon FOSSAT

Ingénieur Electronicien à la Direction Générale de l'Aviation Civile (DGAC)

Email : simon.fossat@gmail.com

# *Abstract*

This study follows on A new approach to relativity - Edition II [1] . Its goal is to expose the classical relativistic calculus of the special relativity but based on the new Lorentz Lafrénière's group transformation.

We will also demonstrate the invariance of the Maxwell's equations according to these new group of transformation.

1. A new approach to relativity - Edition II

# *Introduction*

Cette étude s'inscrit dans la continuité de l'étude Principe de relativité revisité - Edition II [2] . Elle a pour but d'établir les calculs relativistes classiques sur la base du nouveau groupe de transformation de Lorentz Lafrénière.

Nous montrerons notamment l'invariance des équations de Maxwell dans ce nouveau groupe d'équation.

2. Le principe de relativité revisité - Edition II

# Table des matières

# Chapitre 1

# Les équations de Lorentz-Lafrénière

## 1.1 Présentation

Nous allons désormais présenter les équations de transformations de Lorentz sous une forme alternative de leur expression historique [3] , en tâchant d'attribuer aux variables d'espace et de temps le sens physique que Hendrik Lorentz leur donnait. Nous montrerons en quoi la compréhension de ces équations peut différer des interprétations d'Albert Einstein qui a utilisé les équations de Lorentz pour fonder la mécanique relativiste, mais en attribuant un sens différent aux variables qu'elles associent.

L'expression alternative des équations de Lorentz que nous utiliserons est la suivante :

$$x' = g.x + \beta.ct$$
$$ct' = g.ct - \beta.x$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Avec :

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$\beta$ : Vitesse de l'objet normalisée selon $c$

$$g = \sqrt{1 - \beta^2}$$

$g$ : Facteur de Lorentz

## 1.2 Changement de variable

On pose : $ct = \tau$ ainsi que $ct' = \tau'$

D'où on obtient :

$$x' = g.x + \beta.\tau$$
$$\tau' = g.\tau - \beta.x$$

3. Hendrik Lorentz - Electromagnetic Phenomena in a System Moving with Any Velocity Smaller than that of Light (1904)

## 1.3 Forme invariante

Considérons les équations de Lorentz et choisissons d'élever au carré les termes :

$$x' = g.x + \beta.\tau$$
$$\tau' = g.\tau - \beta.x$$

$$x'^2 = (g.x + \beta.\tau)^2$$
$$\tau'^2 = (g.\tau - \beta.x)^2$$

$$x'^2 = g^2.x^2 + \beta^2.\tau^2 + 2.\beta.g.x.\tau$$
$$\tau'^2 = g^2.\tau^2 + \beta^2.x^2 - 2.\beta.g.x.\tau$$

$$x'^2 + \tau'^2 = (1 - \beta^2 + \beta^2).x^2 + 2.\beta.g.x.\tau + (1 - \beta^2 + \beta^2).\tau^2 - 2.\beta.g.x.\tau$$

$$x'^2 + \tau'^2 = x^2 + \tau^2$$

On considère deux points $(x_1, \tau_1)$ et $(x_3, \tau_3)$ distants de $d$ dans un référentiel au repos. On a donc :

$$x_3 - x_1 = d$$
$$\tau_3 - \tau_1 = 0$$

On considère par ailleurs $(x'_1, \tau'_1)$ et $(x'_3, \tau'_3)$, les points correspondants de $(x_1, \tau_1)$ et $(x_3, \tau_3)$ dans le référentiel en mouvement

$$x'_3 - x'_1 = g.d$$
$$\tau'_3 - \tau'_1 = -\beta.d$$

On montre alors facilement que :

$$({x'}_3 - {x'}_1)^2 + (\tau'_3 - \tau'_1)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (\tau_3 - \tau_1)^2 = d^2$$

D'une façon générale, pour deux points distants $M$ et $N$ dans un référentiel au repos et leurs points correspondants $M'$ et $N'$ dans un référentiel en mouvement, on a la relation :

$$({x'}_m - {x'}_n)^2 + (\tau'_m - \tau'_n)^2 = (x_m - x_n)^2 + (\tau_m - \tau_n)^2$$

Remarque : La section présente vient compléter et corriger la section correspondante de Principe de relativité revisité - Edition II

# Chapitre 2

# Application aux systèmes mécaniques

## 2.1 Référentiel de Lorentz

Selon ces équations, la variable $x$ correspond à la coordonnée d'un élément matériel dans un référentiel au repos. La variable $x'$, quant à elle, représente la coordonnée, dans le référentiel au repos, de l'élément matériel en mouvement selon la vitesse normalisée $\beta$.

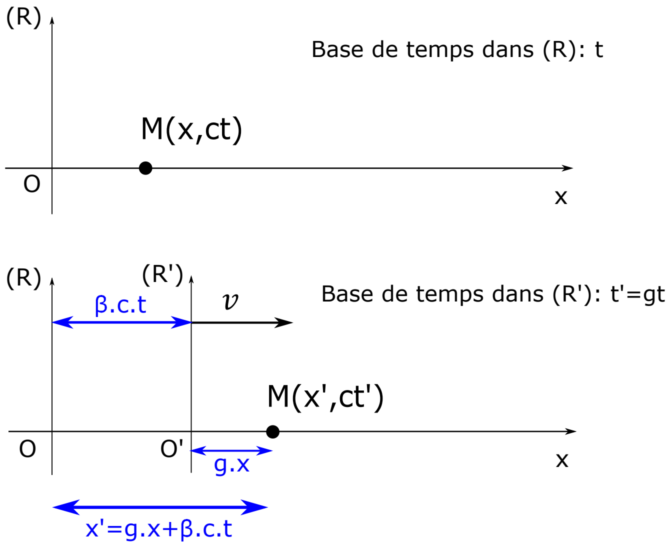


Figure 1.3 :
1.3.1 : $(x, \tau)$ : Coordonnées du point matériel M dans le référentiel au repos R
1.3.2 : $(x', \tau')$ : Coordonnées du même point matériel M, de vitesse $\beta$, dans le référentiel au repos R.

- Unité de mesure des longueurs : la secondes-lumière

- Unité de mesure des durées : la seconde

- L'unité pour la grandeur $c.t$ est la seconde-lumière également

## 2.2 Contraction des longueurs

Dans le cas d'un objet matériel animé de la vitesse normalisée $\beta$ et compris comme un ensemble de $n$ éléments matériels reliés entre eux et de coordonnées spatiales

$(x_n)$ au repos on obtient un ensemble de $n$ éléments de coordonnées spatiales $(x'_n)$ rapportées au référentiel fixe.

Quant à la variable $t$, elle correspond au temps relevé dans le référentiel au repos pour la coordonnée $x$ de l'élément matériel. La variable $t'$ représente le temps local mesuré par un observateur associé au mouvement de l'élément matériel.

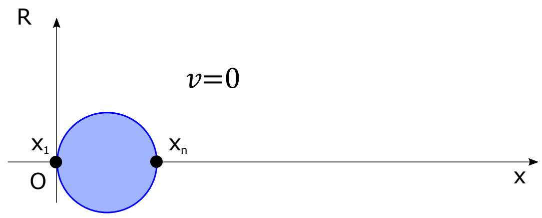


Figure 1.4 :
$t = 0$
$(x_1, \tau) = (0, 0)$
$(x_n, \tau) = (x_n, 0)$

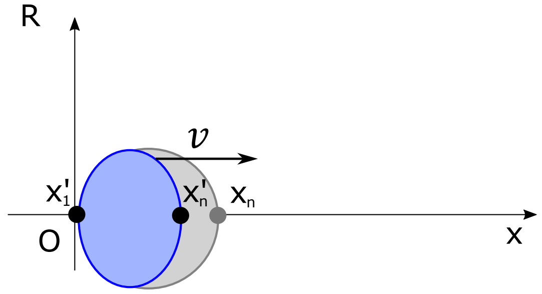


Figure 1.5 :
$t = 0$
$(x'_1, \tau') = (0, 0)$
$(x'_n, \tau') = (g.x_n, -\beta.x_n)$

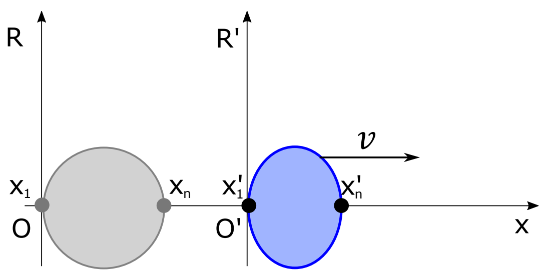


Figure 1.6 :
Quelque soit $t$
$(x'_1, \tau') = (\beta.\tau, g.\tau)$
$(x'_n, \tau') = (g.x_n + \beta.\tau, g.\tau - \beta.x_n)$

- Coordonnées d'un point de l'objet en mouvement dans le référentiel au repos :

$$(x'_n, \tau)$$

- Coordonnées d'un point de l'objet en mouvement dans le référentiel en mouvement :

$$(g.x_n, \tau')$$

- Si on considère l'objet dans sa longueur, on a dans le référentiel au repos :

$$x'_n - x'_1 = g.x_n + \beta.\tau - (g.x_1 + \beta.\tau)$$
$$x'_n - x'_1 = g.(x_n - x_1)$$

- Si on considère l'objet dans sa longueur, on a dans le référentiel en mouvement :

$$g.x_n - g.x_1 = g.(x_n - x_1)$$

=> La longueur de l'objet en mouvement est :

$$d' = g.d$$

Ainsi, il ne s'agit plus de considérer que l'espace se contracte ou se dilate, mais plutôt de formuler en équation un phénomène physique bien réel : celui de la contraction des dimensions des objets matériels dans le sens de leur mouvement.

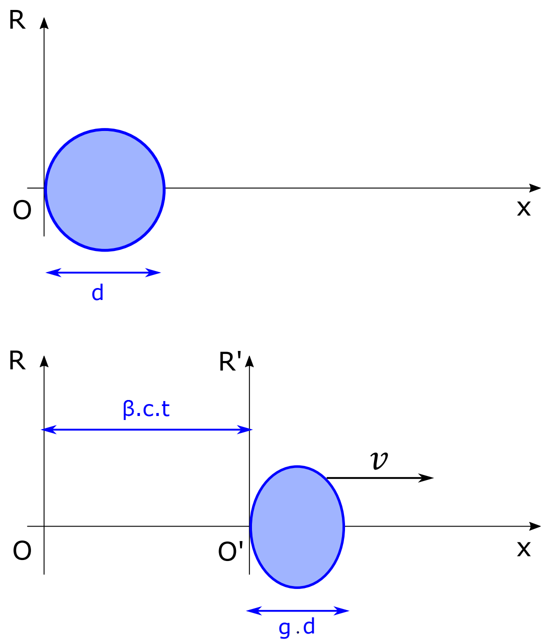


Figure 1.7 : Contraction de l'objet dans le sens de son mouvement

## 2.3 Relativité des observations

Les équations de Lorentz et leur forme inversée donnent :

$$x' = g.x + \beta.\tau$$
$$\tau' = g.\tau - \beta.x$$

$$x = g.x' - \beta.\tau'$$
$$\tau = g.\tau' + \beta.x'$$

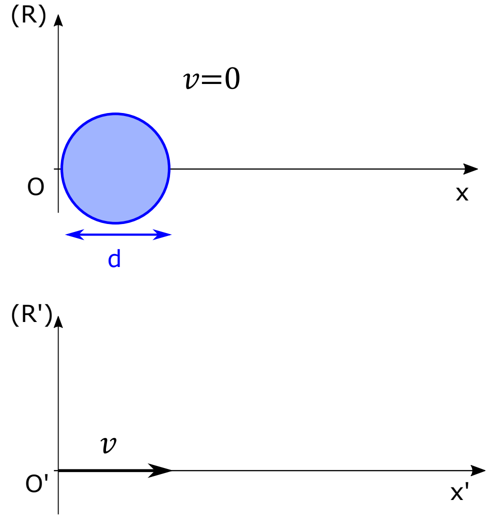


Figure 1.9 : L'observateur est en mouvement et l'objet est immobile

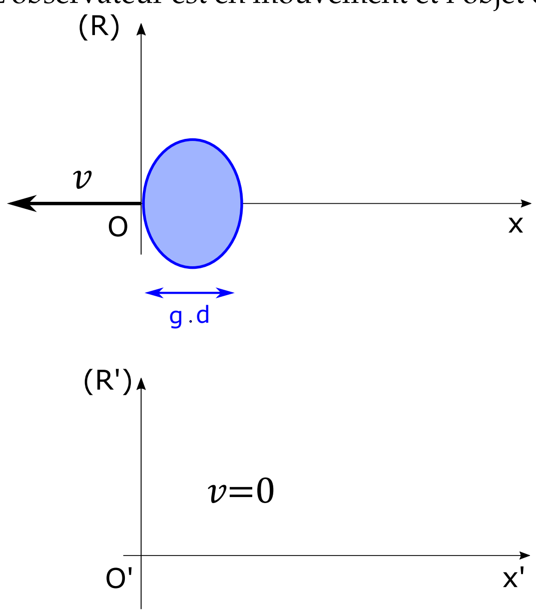


Figure 1.10 : Relativité des observations : l'observateur se considère immobile et voit l'objet s'éloigner et se contracter

Pour un observateur en mouvement selon la vitesse $v$, l'objet au repos est en vitesse d'éloignement à la vitesse $v'$ avec $v' = v$.

La longueur estimée de l'objet au repos est donnée par :

$$d' = v'.t'$$

$$d' = v'.g.t$$

Avec $v' = v$, on obtient :

$$d' = v.g.t(1)$$

Par ailleurs on a :

$$d = v.t$$

$$t = \frac{d}{v}(2)$$

En rapprochant (1) et (2) on déduit :

$$d' = v.g.\frac{d}{v}$$

Ce qui donne :

$$d' = g.d$$

Nous obtenons une de nos premières remarques concernant la relativité selon les équations de Lorentz. Du point de vue des observateurs

- Un observateur au repos voit un objet en mouvement se contracter selon $g.d$

- Un observateur en mouvement peut de bon droit, au nom de l'équivalence des observations, affirmer qu'il est immobile tandis que l'objet est en mouvement d'éloignement et qu'il se contracte selon : $g.d$

Par ailleurs :

- Un objet en mouvement se contracte effectivement selon : $g.d$

- Un objet au repos conserve sa longueur $d$, indépendamment des mesures de l'observateur en mouvement

=> Derrière l'équivalence des points de vue des deux observateurs, la réalité du phénomène n'est pas la même.

## 2.4 Vitesses

$$x' = g.x + \beta.\tau(1)$$
$$\tau' = g.\tau - \beta.x(2)$$

$$x = g.x' - \beta.\tau'(3)$$
$$\tau = g.\tau' + \beta.x'(4)$$

A partir de (1) et (2) on peut écrire :

$$x = \frac{1}{g}.(x' - \beta.\tau)(5)$$

et :

$$\tau = \frac{1}{g}.(\tau' + \beta.x)(6)$$

A partir de (3) et (4) on peut écrire :

$$x' = \frac{1}{g}.(x + \beta.\tau')(7)$$

et :

$$\tau' = \frac{1}{g}.(\tau - \beta.x')(8)$$

La différentielle de (7) donne suivie d'une factorisation de $d\tau'$ donne :

$$dx' = \frac{1}{g}.(\frac{dx}{d\tau'} + \beta).dt'$$

La différentielle de (6) donne suivie d'une factorisation de $dt'$ donne :

$$d\tau = \frac{1}{g}.(1 + \beta.\frac{dx}{d\tau'}).dt'$$

En effectuant le rapport, on obtient :

$$\frac{dx'}{d\tau} = \frac{\frac{dx}{d\tau'} + \beta}{1 + \beta.\frac{dx}{d\tau'}}$$

Ce qui donne :

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt'} + c.\beta}{1 + \frac{\beta}{c}.\frac{dx}{dt'}}$$

Cette équation différentielle se simplifie naturellement puisque l'un des deux référentiels est au repos, d'où l'on a :

$$\frac{dx}{dt'} = 0$$

On retrouve la vitesse de l'objet contracté dans le référentiel au repos :

$$\frac{dx'}{dt} = c.\beta$$

Remarque 1 : Puisque la situation dans un référentiel au repos est par définition inaccessible pour un observateur, la vitesse normalisée $\beta$ de l'objet n'est pas mesurable, bien que nous devons évoquer son existence,

Remarque 2 : Il est possible d'établir la vitesse propre de l'objet en considérant la base de temps de son propre référentiel.

$$x' = g.x + \beta.ct$$
$$ct' = g.ct - \beta.x$$

$$dx' = g.dx + \beta.c.dt$$

$$cdt' = g.cdt - \beta.dx$$

$$dx' = (g.\frac{dx}{dt} + c.\beta).dt$$

$$cdt' = (g - \frac{\beta}{c}.\frac{dx}{dt}).dt$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{g.\frac{dx}{dt} + c.\beta}{g - \frac{\beta}{c}.\frac{dx}{dt}}$$

Puisque l'on a $\frac{dx}{dt} = 0$, on en déduit :

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\beta}{g}.c$$

Si $\beta$ tend vers 1, alors $g$ tend vers 0 et la vitesse propre $\frac{dx'}{dt'}$ tend vers l'infini, c'est pourquoi cette grandeur ne nous semble pas pertinente d'un point de vue physique.

Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, seules les vitesses relatives établies entre différents référentiels mobiles sont mesurables tout en renvoyant à une grandeur ayant une signification physique.

# Chapitre 3

# Changement de référentiel de Lorentz

## 3.1 Présentation

Les calculs de transformation précédents ont été effectué pour le passage d'un référentiel fixe à un référentiel mobile. Or, d'un point de vue physique, c'est le passage d'un référentiel mobile à un autre référentiel mobile qui a du sens. Néanmoins, nous pourrons réutiliser le formalisme précédemment établi.

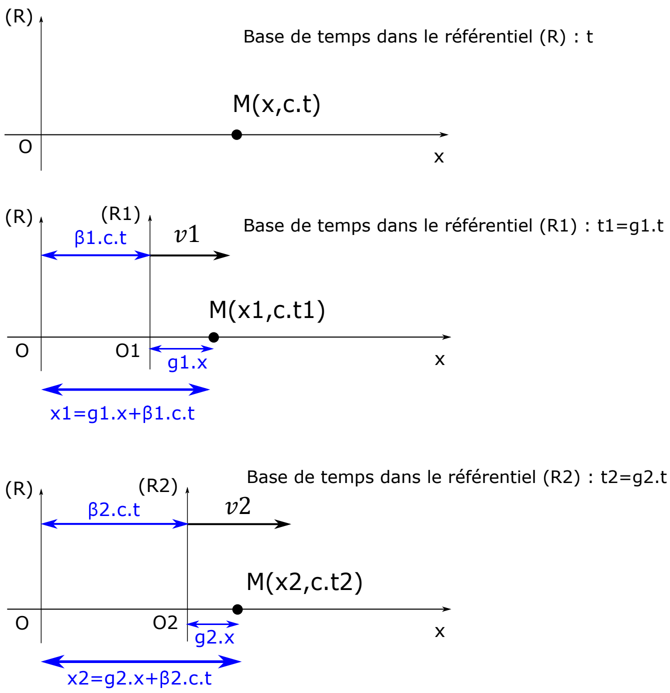


Figure 1.2 :
1.2.1 : $(x, ct)$ : Coordonnées de M dans le référentiel au repos R
1.2.2 : $(x_1, ct_1)$ : Coordonnées de M, de vitesse $\beta_1$, dans le référentiel au repos R.
1.2.3 : $(x_2, ct_2)$ : Coordonnées de M, de vitesse $\beta_2$, dans le référentiel au repos R.

## 3.2 Transformation des coordonnées

Etant donné que les coordonnées du point matériel en mouvement selon $\beta_1$ et $\beta_2$ peuvent être rapportées aux coordonnées dans le référentiel au repos, on peut établir leur relation grâce aux équations de Lorentz et leur forme inversée :

$$x_1 = g_1.x + \beta_1.ct(1)$$
$$ct_1 = g_1.ct - \beta_1.x(2)$$

$$x = g_1.x_1 - \beta_1.ct_1(3)$$
$$ct = g_1.ct_1 + \beta_1.x_1(4)$$

$$x_2 = g_2.x + \beta_2.ct(5)$$
$$ct_2 = g_2.ct - \beta_2.x(6)$$

$$x = g_2.x_2 - \beta_2.ct_2(7)$$
$$ct = g_2.ct_2 + \beta_2.x_2(8)$$

Avec :

$$\beta_1 = \frac{v_1}{c}$$
$$g_1 = \sqrt{1 - \beta_1^2}$$

Et :

$$\beta_2 = \frac{v_2}{c}$$
$$g_2 = \sqrt{1 - \beta_2^2}$$

En rapprochant (1) de (7), ainsi que (2) de (8), on obtient :

$$x_1 = g_1.(g_2.x_2 - \beta_2.ct_2) + \beta_1.(g_2.ct_2 + \beta_2.x_2)$$
$$ct_1 = g_1.(g_2.ct_2 + \beta_2.x_2) - \beta_1.(g_2.x_2 - \beta_2.ct_2)$$

$$x_1 = (g_1.g_2 + \beta_1.\beta_2).x_2 + (\beta_1.g_2 - \beta_2.g_1).ct_2$$
$$ct_1 = (g_1.g_2 + \beta_1.\beta_2).ct_2 - (\beta_1.g_2 - \beta_2.g_1).x_2$$

En rapprochant (5) de (3), ainsi que (6) de (4), on obtient :

$$x_2 = g_2.(g_1.x_1 - \beta_1.ct_1) + \beta_2.(g_1.ct_1 + \beta_1.x_1)$$
$$ct_2 = g_2.(g_1.ct_1 + \beta_1.x_1) - \beta_2.(g_1.x_1 - \beta_1.ct_1)$$

$$x_2 = (g_1.g_2 + \beta_1.\beta_2).x_1 - (\beta_1.g_2 - \beta_2.g_1).ct_1$$
$$t_2 = (g_1.g_2 + \beta_1.\beta_2).ct_1 + (\beta_1.g_2 - \beta_2.g_1).x_1$$

On pose :

$$G_{12} = g_1.g_2 + \beta_1.\beta_2$$
$$B_{12} = \beta_1.g_2 - \beta_2.g_1$$

D'où l'on écrit à l'aide des équations établies précédemment :

$$x_1 = G_{12}.x_2 + B_{12}.ct_2(9)$$
$$ct_1 = G_{12}.ct_2 - B_{12}.x_2(10)$$

Equations inverses :

$$x_2 = G_{12}.x_1 - B_{12}.ct_1(11)$$
$$ct_2 = G_{12}.ct_1 + B_{12}.x_1(12)$$

Remarque : Si on effectue le développement $G_{12}^2 + B_{12}^2$ on montre facilement que :

$$G_{12}^2 + B_{12}^2 = 1$$

## 3.3 Changement de variable

On pose :

$$ct_1 = \tau_1$$

Ainsi que :

$$ct_2 = \tau_2$$

D'où on obtient :

$$x_1 = G_{12}.x_2 + \beta_{12}.\tau_2$$
$$\tau_1 = G_{12}.\tau_2 - \beta_{12}.x_2$$

Ainsi que :

$$x_2 = G_{12}.x_1 - \beta_{12}.\tau_1$$
$$\tau_2 = G_{12}.\tau_1 + \beta_{12}.x_1$$

## 3.4 Forme invariante

Considérons deux systèmes $(x_1, \tau_1)$ d'une part, $(x_2, \tau_2)$ d'autre part :

$${x_1}^2 + {\tau_1}^2 = (G_{12}.x_2 + \beta_{12}.\tau_2)^2 + (G_{12}.\tau_2 - \beta_{12}.x_2)^2$$

$${x_1}^2 + {\tau_1}^2 = G_{12}^2.{x_2}^2 + \beta_{12}^2.{\tau_2}^2 + 2.\beta_{12}.G_{12}.x_2.\tau_2 + G_{12}^2.{\tau_2}^2 + \beta_{12}^2.{x_2}^2 - 2.\beta_{12}.G_{12}.x_2.\tau_2$$

$${x_1}^2 + {\tau_1}^2 = (G_{12}^2 + \beta_{12}^2).{x_2}^2 + (G_{12}^2 + \beta_{12}^2).{\tau_2}^2$$

$$x_1{}^2 + \tau_1{}^2 = x_2{}^2 + \tau_2{}^2$$

On considère par ailleurs dans $R1$ deux points distants de $d$ :

$$(x_1, \tau_1)$$
$$(x_3, \tau_3)$$
$$x_3 - x_1 = d$$
$$\tau_3 - \tau_1 = 0$$

Ainsi que leurs points correspondants dans $R2$

$$(x_2, \tau_2)$$
$$(x_4, \tau_4)$$
$$x_4 - x_2 = G_{12}.d$$
$$\tau_4 - \tau_2 = -B_{12}.d$$

On montre alors facilement que :

$$(x_4 - x_2)^2 + (\tau_4 - \tau_2)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (\tau_3 - \tau_1)^2 = d^2$$

D'une façon générale, pour deux points distants $M1$ et $N1$ dans un premier référentiel en mouvement et leurs points correspondants $M2$ et $N2$ dans un second référentiel en mouvement, on a la relation :

$$(x_{m2} - x_{n2})^2 + (\tau_{m2} - \tau_{n2})^2 = (x_{m1} - x_{n1})^2 + (\tau_{m1} - \tau_{n1})^2$$

Remarque : La section présente vient compléter et corriger la section correspondante de Principe de relativité revisité - Edition II

## 3.5 Longueurs relatives

Considérons un objet de coordonnées $(x_n, \tau)$ dans un référentiel au repos, ainsi que ses coordonnées $(x'_{n1}, \tau)$ lorsqu'il est en mouvement à la vitesse normalisée $\beta_1$. Considérons enfin les coordonnées$(x'_{n2}, \tau)$ de l'objet évoluant à la vitesse normalisée $\beta_2$.

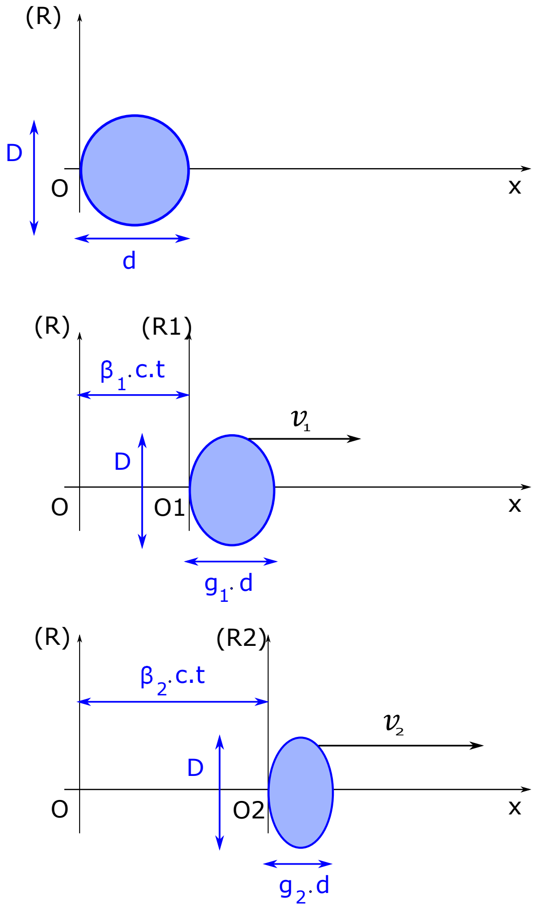


Figure 1.11 : On considère le même objet d'abord au repos, puis en mouvement selon $\beta_1$, puis selon $\beta_2$

On a :

$$x_1 = G_{12}.x_2 + B_{12}.ct_2$$

* Lorsqu'un objet, de longueur $d$ au repos, est en mouvement selon la vitesse normalisée $\beta_1$, sa longueur mesurée dans un référentiel en mouvement selon la vitesse normalisée $\beta_2$ est :

$$D_1 = G_{12}.d$$

On a également :

$$x_2 = G_{12}.x_1 - B_{12}.ct_1$$

* Lorsqu'un objet, de longueur $d$ au repos, est en mouvement selon la vitesse normalisée $\beta_2$, sa longueur mesurée dans un référentiel en mouvement selon la vitesse normalisée $\beta_1$ est :

$$D_2 = G_{12}.d$$

=> La longueur perçue d'un objet de vitesse $\beta_1$ depuis un référentiel de mouvement $\beta_2$ est égale à la longueur perçue du même objet à la vitesse $\beta_2$ depuis un référentiel de mouvement $\beta_1$

$$D_1 = D_2$$

## 3.6 Vitesses relatives

En utilisant (10) et (11) on obtient :

$$x_1 = \frac{1}{G_{12}}.(x_2 + B_{12}.ct_1)$$

$$ct_2 = \frac{1}{G_{12}}.(ct_1 + B_{12}.x_2)$$

$$dx_1 = \frac{c.dt_1}{G_{12}}.(\frac{1}{c}.\frac{dx_2}{dt_1} + B_{12})$$

$$c.dt_2 = \frac{c.dt_1}{G_{12}}.(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})$$

$$\frac{1}{c}.\frac{dx_1}{dt_2} = \frac{\frac{1}{c}.\frac{dx_2}{dt_1} + B_{12}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}}$$

$$\frac{dx_1}{dt_2} = \frac{\frac{dx_2}{dt_1} + c.B_{12}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}}$$

On trouve également que :

$$\frac{dy_1}{dt_2} = G_{12}.\frac{\frac{dy_2}{dt_1}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}}$$

Ainsi que :

$$\frac{dz_1}{dt_2} = G_{12}.\frac{\frac{dz_2}{dt_1}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}}$$

De façon réciproque :

$$\frac{dx_2}{dt_1} = \frac{\frac{dx_1}{dt_2} - c.B_{12}}{1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}}$$

$$\frac{dy_2}{dt_1} = G_{12}.\frac{\frac{dy_1}{dt_2}}{1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}}$$

$$\frac{dz_2}{dt_1} = G_{12}.\frac{\frac{dz_1}{dt_2}}{1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}}$$

On considère les grandeurs suivantes :

$V_1$ : Vitesse relative de l'objet $O_1$ du point de vue de $R_2$

$V_2$ : Vitesse relative de l'objet $O_2$ du point de vue de $R_1$

On obtient alors :

$$V_{x1} = \frac{dx_1}{dt_2}$$

$$V_{y1} = \frac{dy_1}{dt_2}$$

$$V_{z1} = \frac{dz_1}{dt_2}$$

Ainsi que :

$$V_{x2} = \frac{dx_2}{dt_1}$$

$$V_{y2} = \frac{dy_2}{dt_1}$$

$$V_{z2} = \frac{dz_2}{dt_1}$$

D'où on obtient :

$$V_{x1} = \frac{V_{x2} + c.B_{12}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x2}}$$

$$V_{y1} = G_{12}.\frac{V_{y_2}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}$$

$$V_{z1} = G_{12}.\frac{V_{z_2}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}$$

Et de façon réciproque :

$$V_{x2} = \frac{V_{x1} - c.B_{12}}{1 - \frac{B_{12}}{c}.V_{x1}}$$

$$V_{y2} = G_{12}.\frac{V_{y_1}}{1 - \frac{B_{12}}{c}.V_{x_1}}$$

$$V_{z2} = G_{12}.\frac{V_{z_1}}{1 - \frac{B_{12}}{c}.V_{x_1}}$$

## 3.7 Valeur limite des vitesses et des vitesses relatives

Nous avons précédemment défini le facteur de vitesse composite :

$$B_{12} = g_2.\beta_1 - g_1.\beta_2$$

On peut aussi écrire :

$$B_{12} = \sqrt{1 - \beta_2^2}.\beta_1 - \beta_2.\sqrt{1 - \beta_1^2}$$

Considérons la fonction paramétrée $f_\beta$ telle que :

$$f_\beta(x) = \sqrt{1 - \beta^2}.x - \beta.\sqrt{1 - x^2}$$

Une étude rapide de cette fonction permet de montrer que la valeur de $f_\beta(x)$ est toujours comprise entre -1 et 1 lorsque la variable $x$ varie entre -1 et 1 et lorsque le paramètre $\beta$ varie entre -1 et 1.

$$(-1 < x < 1); (-1 < \beta < 1) \Leftrightarrow -1 < f_\beta(x) < 1$$

On peut donc écrire :

$$(-1 < \beta_1 < 1); (-1 < \beta_2 < 1) \Leftrightarrow -1 < B_{12} < 1$$

Avec $-1 < B_{12} < 1$ on peut écrire :

$$\frac{dx_1}{d\tau_2} - 1 < \frac{dx_1}{d\tau_2} + B_{12} < \frac{dx_1}{d\tau_2} + 1$$

Ainsi que :

$$1 - \frac{dx_1}{d\tau_2} < 1 + B_{12}.\frac{dx_1}{d\tau_2} < 1 + \frac{dx_1}{d\tau_2}$$

En faisant le rapport :

$$\frac{\frac{dx_1}{d\tau_2} - 1}{1 - \frac{dx_1}{d\tau_2}} < \frac{\frac{dx_1}{d\tau_2} + B_{12}}{1 + B_{12}.\frac{dx_1}{d\tau_2}} < \frac{\frac{dx_1}{d\tau_2} + 1}{1 + \frac{dx_1}{d\tau_2}}$$

$$-1 < \frac{\frac{dx_1}{d\tau_2} + B_{12}}{1 + B_{12}.\frac{dx_1}{d\tau_2}} < 1$$

$$-1 < \frac{dx_2}{d\tau_1} < 1$$

$$-c < \frac{dx_2}{dt_1} < c$$

De la même façon, on montre que :

$$-1 < \frac{dx_1}{d\tau_2} < 1$$

$$-c < \frac{dx_1}{dt_2} < c$$

La vitesse relative limite d'un objet en mouvement du point de vue d'un autre référentiel en mouvement est donc égale à : $c$. Or, on sait également que la vitesse limite d'un objet est égale à : $c$

=> Les vitesses et les vitesses relatives ont pour valeur limite : $c$

## 3.8 Accélérations relatives

### 3.8.1 Préambule

Pour la suite des calculs, nous aurons besoin d'établir les relations suivantes :

* Relation $\frac{dt_1}{dt_2}$ :

$$x_1 = G_{12}.x_2 + B_{12}.ct_2 (1)$$

$$ct_1 = G_{12}.ct_2 - B_{12}.x_2(2)$$

$$x_2 = G_{12}.x_1 - B_{12}.ct_1(3)$$
$$ct_2 = G_{12}.ct_1 + B_{12}.x_1(4)$$

$$ct_2 = G_{12}.ct_1 + B_{12}.(G_{12}.x_2 + B_{12}.ct_2)$$

$$ct_2 = G_{12}.ct_1 + B_{12}.G_{12}.x_2 + B_{12}^2.ct_2$$

$$ct_2.(1 - B_{12}^2) = G_{12}.ct_1 + B_{12}.G_{12}.x_2$$

$$G_{12}^2.ct_2 = G_{12}.ct_1 + B_{12}.G_{12}.x_2$$

$$G_{12}.ct_2 = ct_1 + B_{12}.x_2$$

$$G_{12}.cdt_2 = cdt_1 + B_{12}.dx_2$$

$$G_{12}.cdt_2 = cdt_1.(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})$$

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{G_{12}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}}$$

De la même façon, on pourra établir que :

$$\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{G_{12}}{1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}}$$

* Relation entre $(1 - \frac{1}{c^2}.{v_1}^2)$ et $(1 - \frac{1}{c^2}.{v_2}^2)$ :

$$1 - \frac{1}{c^2}.{v_1}^2 = 1 - \frac{1}{c^2}.(\frac{(\frac{dx_2}{dt_1} + c.B_{12})^2}{(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^2} + G_{12}^2.\frac{(\frac{dy_2}{d_t1})^2}{(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^2} + G_{12}^2.\frac{(\frac{dz_2}{d_t1})^2}{(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^2})$$

$$1 - \frac{1}{c^2}.{v_1}^2 = \frac{1}{c^2.(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^2}.(c^2.(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^2) - (\frac{dx_2}{dt_1} + c.B_{12})^2) - G_{12}^2.(\frac{dy_2}{dt_1})^2 - G_{12}^2.(\frac{dz_2}{dt_1})^2)$$

$$1 - \frac{1}{c^2}.{v_1}^2 = \frac{1}{c^2.(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^2}.(c^2 + B_{12}^2.(\frac{dx_2}{dt_1})^2 + 2.c.B_{12}.\frac{dx_2}{dt_1} - (\frac{dx_2}{dt_1})^2 - 2.c.B_{12}.\frac{dx_2}{dt_1} - c^2.B_{12}^2$$

$$-G_{12}^2.(\frac{dy_2}{dt_1})^2 - G_{12}^2.(\frac{dz_2}{dt_1})^2)$$

$$1 - \frac{1}{c^2}.{v_1}^2 = \frac{1}{c^2.(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^2}.(c^2.(1 - B_{12}^2) - G_{12}^2.((\frac{d_{x2}}{d_{t1}})^2 + (\frac{d_{y2}}{d_{t1}})^2 + (\frac{d_{z2}}{d_{t1}})^2)$$

$$1-\frac{1}{c^2}.{v_1}^2=\frac{1}{c^2.(1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^2}.(c^2.G_{12}^2-G_{12}^2.((\frac{d_{x2}}{d_{t1}})^2+(\frac{d_{y2}}{d_{t1}})^2+(\frac{d_{z2}}{d_{t1}})^2)$$

$$1-\frac{1}{c^2}.{v_1}^2=\frac{1}{(1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^2}.(G_{12}^2-\frac{G_{12}^2}{c^2}.((\frac{d_{x2}}{d_{t1}})^2+(\frac{d_{y2}}{d_{t1}})^2+(\frac{d_{z2}}{d_{t1}})^2)$$

$$1-\frac{1}{c^2}.{v_1}^2=\frac{G_{12}^2}{(1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^2}.(1-\frac{1}{c^2}.((\frac{d_{x2}}{d_{t1}})^2+(\frac{d_{y2}}{d_{t1}})^2+(\frac{d_{z2}}{d_{t1}})^2)$$

$$1-\frac{1}{c^2}.{v_1}^2=\frac{G_{12}^2}{(1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^2}.(1-\frac{1}{c^2}.{v_2}^2)$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{c^2}.{v_1}^2}=\frac{G_{12}}{1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}}.\sqrt{1-\frac{1}{c^2}.{v_2}^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}.{v_2}^2}}=\frac{G_{12}}{1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}}.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}.{v_1}^2}}$$

De la même façon, on pourra établir que :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}.{v_1}^2}}=\frac{G_{12}}{1-\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}}.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}.{v_2}^2}}$$

### 3.8.2 Relation entre les accélérations relatives

On considère les grandeurs suivantes :

$a_1$ : Accélération relative de l'objet $O_1$ du point de vue de $R_2$

$a_2$ : Accélération relative de l'objet $O_2$ du point de vue de $R_1$

On obtient alors :

$$a_{x1}=\frac{d^2x_1}{dt_2^2}$$

$$a_{y1}=\frac{d^2y_1}{dt_2^2}$$

$$a_{z1}=\frac{d^2z_1}{dt_2^2}$$

Ainsi que :

$$a_{x2}=\frac{d^2x_2}{dt_1^2}$$

$$a_{y2}=\frac{d^2y_2}{dt_1^2}$$

$$a_{z2}=\frac{d^2z_2}{dt_1^2}$$

$$a_{x1} = \frac{d}{dt_2}.(\frac{dx_1}{dt_2})$$

$$a_{x1} = \frac{dt_1}{dt_2}.\frac{d}{dt_1}(\frac{dx_1}{dt_2})$$

$$a_{x1} = \frac{G_{12}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}}.\frac{d}{dt_1}(\frac{\frac{dx_2}{dt_1} + c.B_{12}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}})$$

On pose :

$$u(x_2) = \frac{dx_2}{dt_1} + c.B_{12}$$

$$v(x_2) = (1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^{-1}$$

En dérivant selon $t_1$ on obtient :

$$u'(x_2) = \frac{d^2x_2}{dt_1^2}$$

$$v'(x_2) = -\frac{B_{12}}{c}.\frac{d^2x_2}{dt_1^2}.(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^{-2}$$

$$(uv)' = u'.v + v'u$$

$$(uv)' = \frac{d^2x_2}{dt_1^2}.(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^{-1} - \frac{B_{12}}{c}.\frac{d^2x_2}{dt_1^2}.(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^{-2}.(\frac{dx_2}{dt_1} + c.B_{12})$$

$$(uv)' = \frac{\frac{d^2x_2}{dt_1^2}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}} - \frac{1}{(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^2}.\frac{B_{12}}{c}.\frac{d^2x_2}{dt_1^2}.(\frac{dx_2}{dt_1} + c.B_{12})$$

$$(uv)' = \frac{\frac{d^2x_2}{dt_1^2}}{(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^2}.(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1} - \frac{B_{12}}{c}.(\frac{dx_2}{dt_1} + c.B_{12}))$$

$$(uv)' = \frac{\frac{d^2x_2}{dt_1^2}}{(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^2}.(1 - B_{12}^2)$$

$$(uv)' = \frac{G_{12}^2}{(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^2}.\frac{d^2x_2}{dt_1^2}$$

On en déduit pour $a_{x1}$ :

$$a_{x1} = \frac{G_{12}^3}{(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^3}.\frac{d^2x_2}{dt_1^2}$$

Calcul de $a_{y1}$ :

$$a_{y1} = \frac{d}{dt_2}.(\frac{dy_1}{dt_2})$$

$$a_{y1} = \frac{dt_1}{dt_2}.\frac{d}{dt_1}(\frac{dy_1}{dt_2})$$

$$a_{y1} = \frac{dt_1}{dt_2}.\frac{d}{dt_1}(G_{12}.\frac{V_{y_2}}{1+\frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}})$$

$$a_{y1} = \frac{G_{12}^2}{1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}}.\frac{d}{dt_1}(\frac{V_{y_2}}{1+\frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}})$$

On pose :

$$u(x_2) = \frac{dy_2}{dt_1}$$

$$v(x_2) = (1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^{-1}$$

En dérivant selon $t_1$ on obtient :

$$u'(x_2) = \frac{d^2y_2}{dt_1^2}$$

$$v'(x_2) = -\frac{B_{12}}{c}.\frac{d^2x_2}{dt_1^2}.(1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^{-2}$$

$$(uv)' = u'.v + v'u$$

$$(uv)' = \frac{d^2y_2}{dt_1^2}.(1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^{-1} - \frac{dy_2}{dt_1}.\frac{B_{12}}{c}.\frac{d^2x_2}{dt_1^2}.(1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^{-2}$$

$$(uv)' = \frac{1}{1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}}.(\frac{d^2y_2}{dt_1^2} - \frac{B_{12}}{c}.\frac{d^2x_2}{dt_1^2}.\frac{\frac{dy_2}{dt_1}}{1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}})$$

On en déduit pour $a_{y1}$ :

$$a_{y1} = \frac{G_{12}^2}{(1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^2}.(\frac{d^2y_2}{dt_1^2} - \frac{B_{12}}{c}.\frac{d^2x_2}{dt_1^2}.\frac{\frac{dy_2}{dt_1}}{1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}})$$

De la même façon que l'on a calculé $a_{y1}$, on trouve pour $a_{z1}$ :

$$a_{z1} = \frac{G_{12}^2}{(1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})^2}.(\frac{d^2z_2}{dt_1^2} - \frac{B_{12}}{c}.\frac{d^2x_2}{dt_1^2}.\frac{\frac{dz_2}{dt_1}}{1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}})$$

En reproduisant des calculs identiques pour $a_{x2}$, $a_{y2}$, $a_{z2}$, on obtiendra :

$$a_{x2} = \frac{G_{12}^3}{(1-\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2})^3}.\frac{d^2x_1}{dt_2^2}$$

$$a_{y2} = \frac{G_{12}^2}{(1-\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2})^2}.(\frac{d^2y_1}{dt_2^2} + \frac{B_{12}}{c}.\frac{d^2x_1}{dt_2^2}.\frac{\frac{dy_1}{dt_2}}{1-\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}})$$

$$a_{z2} = \frac{G_{12}^2}{(1-\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2})^2}.(\frac{d^2z_1}{dt_2^2} + \frac{B_{12}}{c}.\frac{d^2x_1}{dt_2^2}.\frac{\frac{dz_1}{dt_2}}{1-\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}})$$

## 3.9 Forces relatives

On considère les grandeurs suivantes :

$p_1$ : Quantité de mouvement relative de l'objet $O_1$ du point de vue de $R_2$

$p_2$ : Quantité de mouvement relative de l'objet $O_2$ du point de vue de $R_1$

L'expression relativiste de la force relative est donnée par :

$$\overrightarrow{F_1} = \frac{d\overrightarrow{p_1}}{dt_2}$$

Avec :

$$\overrightarrow{p_1} = \frac{m.\overrightarrow{v_1}}{g_1}$$

Et :

$$g_1 = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}$$

D'où l'on a pour $\overrightarrow{F_1}$ :

$$\overrightarrow{F_1} = m.\frac{d}{dt_2}(\frac{\overrightarrow{v_1}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}})$$

Et pour $\overrightarrow{F_2}$ :

$$\overrightarrow{F_2} = m.\frac{d}{dt_1}(\frac{\overrightarrow{v_2}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}})$$

Selon l'axe des $x$, on obtient pour $\overrightarrow{F_1}$ et pour $\overrightarrow{F_2}$ :

$$F_{x1} = m.\frac{d}{dt_2}(\frac{\frac{dx_1}{dt_2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}.(\frac{dx_1}{dt_2})^2}})$$

$$F_{x2} = m.\frac{d}{dt_1}(\frac{\frac{dx_2}{dt_1}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}.(\frac{dx_2}{dt_1})^2}})$$

On pose :

$$u(x_1) = \frac{dx_1}{dt_2}$$

$$v(x_1) = (1 - \frac{v_1^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$$

$$u'(x_1) = \frac{d^2x_1}{dt_2^2}$$

$$v'(x_1) = -\frac{1}{2}.(-2\frac{\frac{dx_1}{dt_2}.\frac{d^2x_1}{dt_2^2}}{c^2} - 2\frac{\frac{dy_1}{dt_2}.\frac{d^2y_1}{dt_2^2}}{c^2} - 2\frac{\frac{dz_1}{dt_2}.\frac{d^2z_1}{dt_2^2}}{c^2}).(1 - \frac{v_1^2}{c^2})^{-\frac{3}{2}}$$

$$v'(x_1) = \frac{1}{c^2}.(\frac{dx_1}{dt_2}.\frac{d^2x_1}{dt_2^2} + \frac{dy_1}{dt_2}.\frac{d^2y_1}{dt_2^2} + \frac{dz_1}{dt_2}.\frac{d^2z_1}{dt_2^2}).(1 - \frac{v_1^2}{c^2})^{-\frac{3}{2}}$$

$$(uv)' = u'.v + v'u$$

$$(uv)' = \frac{d^2x_1}{dt_1^2}.(1 - \frac{v_1^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{c^2}.(\frac{dx_1}{dt_2}.\frac{d^2x_1}{dt_2^2} + \frac{dy_1}{dt_2}.\frac{d^2y_1}{dt_2^2} + \frac{dz_1}{dt_2}.\frac{d^2z_1}{dt_2^2}).(1 - \frac{v_1^2}{c^2})^{-\frac{3}{2}}$$

D'où on obtient :

$$\frac{F_{x1}}{m} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}.\frac{d^2x_1}{dt_2^2} + \frac{1}{c^2}.\frac{dx_1}{dt_2}.\frac{\frac{dx_1}{dt_2}.\frac{d^2x_1}{dt_2^2} + \frac{dy_1}{dt_2}.\frac{d^2y_1}{dt_2^2} + \frac{dz_1}{dt_2}.\frac{d^2z_1}{dt_2^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}.(1 - \frac{v_1^2}{c^2})}$$

De la même façon, on obtient pour $\frac{F_{x2}}{m}$ :

$$\frac{F_{x2}}{m} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}.\frac{d^2x_2}{dt_1^2} + \frac{1}{c^2}.\frac{dx_2}{dt_1}.\frac{\frac{dx_2}{dt_1}.\frac{d^2x_2}{dt_1^2} + \frac{dy_2}{dt_1}.\frac{d^2y_2}{dt_1^2} + \frac{dz_2}{dt_1}.\frac{d^2z_2}{dt_1^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}.(1 - \frac{v_2^2}{c^2})}$$

Selon l'axe des $y$, on obtient selon le même schéma de calcul pour $\overrightarrow{F_1}$ et pour $\overrightarrow{F_2}$ :

$$\frac{F_{y1}}{m} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}.\frac{d^2y_1}{dt_2^2} + \frac{1}{c^2}.\frac{dy_1}{dt_2}.\frac{\frac{dx_1}{dt_2}.\frac{d^2x_1}{dt_2^2} + \frac{dy_1}{dt_2}.\frac{d^2y_1}{dt_2^2} + \frac{dz_1}{dt_2}.\frac{d^2z_1}{dt_2^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}.(1 - \frac{v_1^2}{c^2})}$$

$$\frac{F_{y2}}{m} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}.\frac{d^2y_2}{dt_1^2} + \frac{1}{c^2}.\frac{dy_2}{dt_1}.\frac{\frac{dx_2}{dt_1}.\frac{d^2x_2}{dt_1^2} + \frac{dy_2}{dt_1}.\frac{d^2y_2}{dt_1^2} + \frac{dz_2}{dt_1}.\frac{d^2z_2}{dt_1^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}.(1 - \frac{v_2^2}{c^2})}$$

Selon l'axe des $z$, on obtient selon le même schéma de calcul pour $\overrightarrow{F_1}$ et pour $\overrightarrow{F_2}$ :

$$\frac{F_{z1}}{m} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}.\frac{d^2z_1}{dt_2^2} + \frac{1}{c^2}.\frac{dz_1}{dt_2}.\frac{\frac{dx_1}{dt_2}.\frac{d^2x_1}{dt_2^2} + \frac{dy_1}{dt_2}.\frac{d^2y_1}{dt_2^2} + \frac{dz_1}{dt_2}.\frac{d^2z_1}{dt_2^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}.(1 - \frac{v_1^2}{c^2})}$$

$$\frac{F_{z2}}{m} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}.\frac{d^2z_2}{dt_1^2} + \frac{1}{c^2}.\frac{dz_2}{dt_1}.\frac{\frac{dx_2}{dt_1}.\frac{d^2x_2}{dt_1^2} + \frac{dy_2}{dt_1}.\frac{d^2y_2}{dt_1^2} + \frac{dz_2}{dt_1}.\frac{d^2z_2}{dt_1^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}.(1 - \frac{v_2^2}{c^2})}$$

Il s'agit désormais d'utiliser les relations remarquables du préambule de ce chapitre afin d'exprimer $\overrightarrow{F_1}$ en fonction de $\overrightarrow{F_2}$ et réciproquement

Les calculs pour y parvenir sont très longs, nous choisirons ici d'en fournir les seuls résultats en nous basant sur le travail de Valery P. Dmitriyev [3]

A l'issue de ces calculs, on trouve les formules de transformations suivantes pour les forces :

3. Relativstic force transformation

$$F_{x1} = F_{x2} + \frac{B_{12}}{c} \cdot \frac{1}{1 + \frac{B_{12}}{c} \cdot \frac{dx_2}{dt_1}} (F_{y2} \cdot \frac{dy_2}{dt_1} + F_{z2} \cdot \frac{dz_2}{dt_1})$$

$$F_{y1} = \frac{G_{12}}{1 + \frac{B_{12}}{c} \cdot \frac{dx_2}{dt_1}} . F_{y2}$$

$$F_{z1} = \frac{G_{12}}{1 + \frac{B_{12}}{c} \cdot \frac{dx_2}{dt_1}} . F_{z2}$$

Et de façon réciproque :

$$F_{x2} = F_{x1} - \frac{B_{12}}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{B_{12}}{c} \cdot \frac{dx_1}{dt_2}} (F_{y1} \cdot \frac{dy_1}{dt_2} + F_{z1} \cdot \frac{dz_1}{dt_2})$$

$$F_{y2} = \frac{G_{12}}{1 - \frac{B_{12}}{c} \cdot \frac{dx_1}{dt_2}} . F_{y1}$$

$$F_{z2} = \frac{G_{12}}{1 - \frac{B_{12}}{c} \cdot \frac{dx_1}{dt_2}} . F_{z1}$$

## 3.10 Transformation des champs électrique et magnétique

On considère la force de Lorentz :

$$\overrightarrow{F_1} = q.\overrightarrow{E_1} + q.\overrightarrow{V_1} X \overrightarrow{B_1}$$

Composante électrique :

$$\overrightarrow{F_1} = q.\overrightarrow{E_1}$$

Composante magnétique :

$$\overrightarrow{F_1} = q.\overrightarrow{V_1} X \overrightarrow{B_1}$$

### 3.10.1 Application à la force électrique

Composante électrique :

$$\overrightarrow{F_1} = q.\overrightarrow{E_1}$$

$$F_{x1} = q.E_{x1}$$
$$F_{y1} = q.E_{y1}$$
$$F_{z1} = q.E_{z1}$$

Ou encore :

$$\frac{F_{x1}}{q} = E_{x1}$$

$$\frac{F_{y1}}{q} = E_{y1}$$

$$\frac{F_{z1}}{q} = E_{y1}$$

La force électrique se transforme en une composante électrique et magnétique :

$$\overrightarrow{F_2} = q.\overrightarrow{E_2} + q.\overrightarrow{V_2} X \overrightarrow{B_2}$$

$$F_{x2} = q.E_{x2} + q.(V_{y2}.B_{z2} - V_{z2}.B_{y2})$$
$$F_{y2} = q.E_{y2} + q.(V_2.B_{x2} - V_{x2}.B_{z2})$$
$$F_{z2} = q.E_{z2} + q.(V_{x2}.B_{y2} - V_{y2}.B_{x2})$$

Ou encore :

$$\frac{F_{x2}}{q} = E_{x2} + (V_{y2}.B_{z2} - V_{z2}.B_{y2})$$
$$\frac{F_{y2}}{q} = E_{y2} + (V_2.B_{x2} - V_{x2}.B_{z2})$$
$$\frac{F_{z2}}{q} = E_{z2} + (V_{x2}.B_{y2} - V_{y2}.B_{x2})$$

Selon l'axe des $x$ on peut écrire en vertu de l'équation de transformation des forces :

$$F_{x2} = F_{x1} - \frac{B_{12}}{c}.\frac{1}{1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}}(F_{y1}.\frac{dy_1}{dt_2} + F_{z1}.\frac{dz_1}{dt_2})$$

$$\frac{F_{x2}}{q} = E_{x1} - \frac{B_{12}}{c}.\frac{1}{1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}}(E_{y1}.G_{12}.\frac{\frac{dy_2}{dt_1}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}} + E_{z1}.G_{12}.\frac{\frac{dz_2}{dt_1}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}})$$

Or, nous avons la relation remarquable suivante :

$$(1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}).(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}) = G_{12}^2$$

D'où l'on a :

$$\frac{F_{x2}}{q} = E_{x1} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.(V_{y2}.E_{y1} + V_{z2}.E_{z1})$$

Par identification des termes, on obtient :

$$\begin{cases} E_{x2} = E_{x1} \\ B_{y2} = \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{z1} \\ B_{z2} = -\frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{y1} \end{cases}$$

Selon l'axe des $y$ on peut écrire en vertu de l'équation de transformation des forces :

$$F_{y2} = \frac{G_{12}}{1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}}.F_{y1}$$

Or, nous avons la relation remarquable suivante :

$$\frac{G_{12}}{1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}} = \frac{1}{G_{12}}.(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})$$

D'où l'on a :

$$\frac{F_{y2}}{q} = \frac{G_{12}}{1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}}.E_{y1}$$

$$\frac{F_{y2}}{q} = \frac{1}{G_{12}}.E_{y1} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.V_{x2}$$

Par identification des termes, on obtient :

$$\begin{cases} E_{y2} = \frac{E_{y1}}{G_{12}} \\ B_{x2} = 0 \\ B_{z2} = -\frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{y1} \end{cases}$$

Selon l'axe des $z$ on peut écrire en vertu de l'équation de transformation des forces :

$$F_{z2} = \frac{G_{12}}{1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}}.F_{z1}$$

Or, nous avons la relation remarquable suivante :

$$\frac{G_{12}}{1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}} = \frac{1}{G_{12}}.(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})$$

D'où l'on a :

$$\frac{F_{z2}}{q} = \frac{G_{12}}{1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}}.E_{z1}$$

$$\frac{F_{z2}}{q} = \frac{1}{G_{12}}.E_{z1} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.V_{x2}$$

Par identification des termes, on obtient :

$$\begin{cases} E_{z2} = \frac{E_{z1}}{G_{12}} \\ B_{x2} = 0 \\ B_{y2} = \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{z1} \end{cases}$$

### 3.10.2 Application à la force magnétique

Composante magnétique :

$$\overrightarrow{F_1} = q.\overrightarrow{V_1} X \overrightarrow{B_1}$$

$$F_{x1} = q.(V_{y1}.B_{z1} - V_{z1}.B_{y1})$$
$$F_{y1} = q.(V_{z1}.B_{x1} - V_{x1}.B_{z1})$$
$$F_{z1} = q.(V_{x1}.B_{y1} - V_{y1}.B_{x1})$$

Ou encore :

$$\frac{F_{x1}}{q} = (V_{y1}.B_{z1} - V_{z1}.B_{y1})$$

$$\frac{F_{y1}}{q} = (V_{z1}.B_{x1} - V_{x1}.B_{z1})$$

$$\frac{F_{z1}}{q} = (V_{x1}.B_{y1} - V_{y1}.B_{x1})$$

La force magnétique se transforme en une composante électrique et magnétique :

$$\overrightarrow{F_2} = q.\overrightarrow{E_2} + q.\overrightarrow{V_2} X \overrightarrow{B_2}$$

$$F_{x2} = q.E_{x2} + q.(V_{y2}.B_{z2} - V_{z2}.B_{y2})$$
$$F_{y2} = q.E_{y2} + q.(V_2.B_{x2} - V_{x2}.B_{z2})$$
$$F_{z2} = q.E_{z2} + q.(V_{x2}.B_{y2} - V_{y2}.B_{x2})$$

Ou encore :

$$\frac{F_{x2}}{q} = E_{x2} + (V_{y2}.B_{z2} - V_{z2}.B_{y2})$$
$$\frac{F_{y2}}{q} = E_{y2} + (V_2.B_{x2} - V_{x2}.B_{z2})$$
$$\frac{F_{z2}}{q} = E_{z2} + (V_{x2}.B_{y2} - V_{y2}.B_{x2})$$

Selon l'axe des $x$ on peut écrire en vertu de l'équation de transformation des forces :

$$F_{x2} = F_{x1} - \frac{B_{12}}{c}.\frac{1}{1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}}(F_{y1}.\frac{dy_1}{dt_2} + F_{z1}.\frac{dz_1}{dt_2})$$

$$\frac{F_{x2}}{q} = (V_{y1}.B_{z1} - V_{z1}.B_{y1}) - \frac{B_{12}}{c}.\frac{1}{1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}}(G_{12}.\frac{V_{y_2}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.F_{y1} + G_{12}.\frac{V_{z_2}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.F_{z1})$$

$$\frac{F_{x2}}{q} = (G_{12}.\frac{V_{y_2}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.B_{z1} - G_{12}.\frac{V_{z_2}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.B_{y1})$$
$$- \frac{B_{12}}{c}.\frac{1}{1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}}(G_{12}.\frac{V_{y_2}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.F_{y1} + G_{12}.\frac{V_{z_2}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.F_{z1})$$

Or, nous avons la relation remarquable suivante :

$$(1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}).(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}) = G_{12}^2$$

D'où l'on déduit :

$$\frac{F_{x2}}{q} = (G_{12}.\frac{V_{y_2}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.B_{z1} - G_{12}.\frac{V_{z_2}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.B_{y1}) - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.(V_{y2}.F_{y1} + V_{z2}.F_{z1})$$

$$\frac{F_{x2}}{q} = (G_{12}.\frac{V_{y_2}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.B_{z1} - G_{12}.\frac{V_{z_2}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.B_{y1})$$
$$- \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.(V_{y2}.(V_{z1}.B_{x1} - V_{x1}.B_{z1}) + V_{z2}.(V_{x1}.B_{y1} - V_{y1}.B_{x1}))$$

$$\frac{F_{x2}}{q} = (G_{12}.\frac{V_{y_2}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.B_{z1} - G_{12}.\frac{V_{z_2}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.B_{y1}) - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.(V_{y2}.(G_{12}.\frac{V_{z_2}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.B_{x1} - \frac{V_{x2} + c.B_{12}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x2}}.B_{z1})$$

$$+V_{z2}.(\frac{V_{x2}+c.B_{12}}{1+\frac{B_{12}}{c}.V_{x2}}.B_{y1}-G_{12}.\frac{V_{y_2}}{1+\frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.B_{x1}))$$

$$\frac{F_{x2}}{q}=\frac{1}{1+\frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.V_{y2}.(G_{12}.B_{z1}-\frac{B_{12}}{c.G_{12}}.G_{12}.V_{z2}.B_{x1}+\frac{B_{12}}{c.G_{12}}.(V_{x2}+c.B_{12}).B_{z1})$$

$$-\frac{1}{1+\frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.V_{z2}.(G_{12}.B_{y1}+\frac{B_{12}}{c.G_{12}}.(V_{x2}+c.B_{12}).B_{y1}-\frac{B_{12}}{c.G_{12}}.V_{y2}.B_{x1})$$

$$\frac{F_{x2}}{q}=\frac{1}{G_{12}.(1+\frac{B_{12}}{c}).V_{x_2}}.V_{y2}.(G_{12}^2.B_{z1}+\frac{B_{12}}{c}.(V_{x2}+c.B_{12}).B_{z1})$$

$$-\frac{1}{G_{12}.(1+\frac{B_{12}}{c}).V_{x_2}}.V_{z2}.(G_{12}^2.B_{y1}+\frac{B_{12}}{c}.(V_{x2}+c.B_{12}).B_{y1})$$

$$\frac{F_{x2}}{q}=\frac{1}{G_{12}.(1+\frac{B_{12}}{c}).V_{x_2}}.V_{y2}.((G_{12}^2+B_{12}^2).B_{z1}+\frac{B_{12}}{c}.V_{x2}.B_{z1})$$

$$-\frac{1}{G_{12}.(1+\frac{B_{12}}{c}).V_{x_2}}.V_{z2}.((G_{12}^2+B_{12}^2).B_{y1}+\frac{B_{12}}{c}.V_{x2})$$

$$\frac{F_{x2}}{q}=\frac{1}{G_{12}.(1+\frac{B_{12}}{c}).V_{x_2}}.V_{y2}.(1+\frac{B_{12}}{c}.V_{x2}).B_{z1}-\frac{1}{G_{12}.(1+\frac{B_{12}}{c}.V_{x_2})}.V_{z2}.(1+\frac{B_{12}}{c}.V_{x2}).B_{y1}$$

$$\frac{F_{x2}}{q}=\frac{1}{G_{12}}.V_{y2}.B_{z1}-\frac{1}{G_{12}}.V_{z2}.B_{y1}$$

Par identification des termes, on obtient :

$$\begin{cases} E_{x2}=0 \\ B_{y2}=\frac{B_{y1}}{G_{12}} \\ B_{z2}=\frac{B_{z1}}{G_{12}} \end{cases}$$

Selon l'axe des $y$ on peut écrire en vertu de l'équation de transformation des forces :

$$F_{y2}=\frac{G_{12}}{1-\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}}.F_{y1}$$

Or, nous avons la relation remarquable suivante :

$$\frac{G_{12}}{1-\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}}=\frac{1}{G_{12}}.(1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})$$

D'où l'on a :

$$\frac{F_{y2}}{q}=\frac{1}{G_{12}}.(1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}).(V_{z1}.B_{x1}-V_{x1}.B_{z1})$$

$$\frac{F_{y2}}{q}=\frac{1}{G_{12}}.(1+\frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}).(G_{12}.\frac{V_{z_2}}{1+\frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.B_{x1}-\frac{V_{x2}+c.B_{12}}{1+\frac{B_{12}}{c}.V_{x2}}.B_{z1})$$

$$\frac{F_{y2}}{q}=V_{z_2}.B_{x1}-\frac{1}{G_{12}}V_{x2}.B_{z1}-\frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{z1}$$

Par identification des termes, on obtient :

$$\begin{cases} E_{y2} = -\frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{z1} \\ B_{x2} = B_{x1} \\ B_{z2} = \frac{B_{z1}}{G_{12}} \end{cases}$$

Selon l'axe des $z$ on peut écrire en vertu de l'équation de transformation des forces :

$$F_{z2} = \frac{G_{12}}{1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}}.F_{z1}$$

Or, nous avons la relation remarquable suivante :

$$\frac{G_{12}}{1 - \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_1}{dt_2}} = \frac{1}{G_{12}}.(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1})$$

D'où l'on a :

$$\frac{F_{z2}}{q} = \frac{1}{G_{12}}.(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}).(V_{x1}.B_{y1} - V_{y1}.B_{x1})$$

$$\frac{F_{z2}}{q} = \frac{1}{G_{12}}.(1 + \frac{B_{12}}{c}.\frac{dx_2}{dt_1}).(\frac{V_{x2} + c.B_{12}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x2}}.B_{y1} - G_{12}.\frac{V_{y_2}}{1 + \frac{B_{12}}{c}.V_{x_2}}.B_{x1})$$

$$\frac{F_{z2}}{q} = \frac{1}{G_{12}}.V_{x2}.B_{y1} + \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{y1} - V_{y2}.B_{x1}$$

Par identification des termes, on obtient :

$$\begin{cases} E_{z2} = \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{y1} \\ B_{x2} = B_{x1} \\ B_{y2} = \frac{B_{y1}}{G_{12}} \end{cases}$$

### 3.10.3 Transformation du champ électromagnétique

Par combinaison linéaire, on en déduit :

$$\begin{cases} E_{x2} = E_{x1} \\ E_{y2} = \frac{E_{y1}}{G_{12}} - \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{z1} \\ E_{z2} = \frac{E_{z1}}{G_{12}} + \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{y1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{x2} = B_{x1} \\ B_{y2} = \frac{B_{y1}}{G_{12}} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{z1} \\ B_{z2} = \frac{B_{z1}}{G_{12}} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{y1} \end{cases}$$

Et de façon réciproque :

$$\begin{cases} E_{x1} = E_{x2} \\ E_{y1} = \frac{E_{y2}}{G_{12}} + \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{z2} \\ E_{z1} = \frac{E_{z2}}{G_{12}} - \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{y2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{x1} = B_{x2} \\ B_{y1} = \frac{B_{y2}}{G_{12}} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{z2} \\ B_{z1} = \frac{B_{z2}}{G_{12}} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{y2} \end{cases}$$

Remarque : Dans les équations de transformation du champ électromagnétique qui viennent d'être établies, $E_1$, $B_1$, $E_2$, $B_2$ représentent les grandeurs suivantes :

$E_1$ : Champ électrique associé à $R_1$ du point de vue de $R_2$

$B_1$ : Champ magnétique associé à $R_1$ du point de vue de $R_2$

$E_2$ : Champ électrique associé à $R_2$ du point de vue de $R_1$

$B_2$ : Champ magnétique associé à $R_2$ du point de vue de $R_1$

## 3.11 Transformation des équations de Maxwell

### 3.11.1 Préambule

On considère les fonctions suivantes :

$$x_1 = f_{x1}(x_2, ct_1)$$
$$ct_2 = f_{ct_2}(x_2, ct_1)$$

Et de façon réciproque

$$x_2 = f_{x2}(x_1, ct_2)$$
$$ct_1 = f_{ct1}(x_1, ct_2)$$

$$x_1 = G_{12}.x_2 + B_{12}.ct_2$$
$$ct_1 = G_{12}.ct_2 - B_{12}.x_2$$

$$x_2 = \frac{1}{G_{12}}.(x_1 - B_{12}.ct_2)$$
$$ct_1 = G_{12}.ct_2 - \frac{B_{12}}{G_{12}}.(x_1 - B_{12}.ct_2)$$

$$x_2 = \frac{1}{G_{12}}.(x_1 - B_{12}.ct_2)$$
$$ct_1 = -\frac{B_{12}}{G_{12}}.x_1 + (G_{12} + \frac{B_{12}^2}{G_{12}}.ct_2)$$

$$x_2 = \frac{1}{G_{12}}.(x_1 - B_{12}.ct_2)$$
$$G_{12}.ct_1 = -B_{12}.x_1 + (G_{12}^2 + B_{12}^2).ct_2$$

$$x_2 = \frac{1}{G_{12}}.(x_1 - B_{12}.ct_2)$$
$$t_1 = -\frac{B_{12}}{c.G_{12}}.x_1 + \frac{1}{G_{12}}.t_2$$

En vertu des règles de dérivations partielles, on a :

$$x_2 = f_{x2}(x_1, ct_2)$$
$$ct_1 = f_{ct1}(x_1, ct_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial t_1}.\frac{\partial t_1}{\partial x_1}$$
$$\frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \frac{\partial}{\partial t_1}.\frac{\partial t_1}{\partial t_2}$$

C'est à dire :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.\frac{\partial}{\partial t_1}$$
$$\frac{\partial}{\partial t_2} = -\frac{c.B_{12}}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial t_1}$$

On s'intéresse désormais au groupe de relation :

$$x_2 = G_{12}.x_1 - B_{12}.ct_1$$
$$ct_2 = G_{12}.ct_1 - B_{12}.x_1$$

$$x_1 = \frac{1}{G_{12}}.(x_2 + B_{12}.ct_1)$$
$$ct_2 = G_{12}.ct_1 + \frac{B_{12}}{G_{12}}.(x_2 + B_{12}.ct_1)$$

$$x_1 = \frac{1}{G_{12}}.(x_2 + B_{12}.ct_1)$$
$$ct_2 = \frac{B_{12}}{G_{12}}.x_2 + (G_{12} + \frac{B_{12}^2}{G_{12}}.ct_1)$$

$$x_1 = \frac{1}{G_{12}}.(x_2 + B_{12}.ct_1)$$
$$G_{12}.ct_2 = -B_{12}.x_2 + (G_{12}^2 + B_{12}^2).ct_1$$

$$x_1 = \frac{1}{G_{12}}.(x_2 + B_{12}.ct_1)$$
$$t_2 = -\frac{B_{12}}{c.G_{12}}.x_2 + \frac{1}{G_{12}}.t_1$$

En vertu des règles de dérivations partielles, on a :

$$x_1 = f_{x1}(x_2, ct_1)$$
$$ct_2 = f_{ct_2}(x_2, ct_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial t_2}.\frac{\partial t_2}{\partial x_2}$$
$$\frac{\partial}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2}.\frac{\partial t_2}{\partial t_1}$$

C'est à dire :

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.\frac{\partial}{\partial t_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial t_2}$$

### 3.11.2 Premier groupe des équations de Maxwell

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_2} = -\frac{d\overrightarrow{B_2}}{dt_1}$$

$$div\overrightarrow{B_1} = 0$$

Expression selon l'axe des $x$ (axe de déplacement) :

$$\frac{\partial E_{z2}}{\partial y_2} - \frac{\partial E_{y2}}{\partial z_2} = -\frac{\partial B_{x2}}{\partial t_1}$$

Avec :

$$\begin{cases} E_{y2} = \frac{E_{y1}}{G_{12}} - \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{z1} \\ E_{z2} = \frac{E_{z1}}{G_{12}} + \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{y1} \\ B_{x2} = B_{x1} \end{cases}$$

D'où on a :

$$\frac{\partial}{\partial y_2}.(\frac{E_{z1}}{G_{12}} + \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{y1}) - \frac{\partial}{\partial z_2}(\frac{E_{y1}}{G_{12}} - \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{z1}) = -\frac{\partial}{\partial t_1}(B_{x1})$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}.(\frac{E_{z1}}{G_{12}} + \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{y1}) - \frac{\partial}{\partial z_1}(\frac{E_{y1}}{G_{12}} - \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{z1}) = -\frac{c.B_{12}}{G_{12}}.\frac{\partial B_{x1}}{\partial x_1} - \frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial B_{x1}}{\partial t_2}$$

$$\frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial E_{z1}}{\partial y_1} + \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.\frac{\partial B_{y1}}{\partial y_1} - \frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial E_{y1}}{\partial z_1} + \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.\frac{\partial B_{z1}}{\partial z_1} = -\frac{c.B_{12}}{G_{12}}.\frac{\partial B_{x1}}{\partial x_1} - \frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial B_{x1}}{\partial t_2}$$

$$\frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial E_{z1}}{\partial y_1} - \frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial E_{y1}}{\partial z_1} + \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.(\frac{\partial B_{x1}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{y1}}{\partial y_1} + \frac{\partial B_{z1}}{\partial z_1}) = -\frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial B_{x1}}{\partial t_2}$$

Or on suppose que :

$$div\overrightarrow{B_1} = 0$$

$$\frac{\partial B_{x1}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{y1}}{\partial y_1} + \frac{\partial B_{z1}}{\partial z_1} = 0$$

D'où on déduit :

$$\frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial E_{z1}}{\partial y_1} - \frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial E_{y1}}{\partial z_1} = -\frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial B_{x1}}{\partial t_2}$$

$$\frac{\partial E_{z1}}{\partial y_1} - \frac{\partial E_{y1}}{\partial z_1} = -\frac{\partial B_{x1}}{\partial t_2}$$

Expression selon l'axe des $y$ :

$$\frac{\partial E_{x2}}{\partial z_2} - \frac{\partial E_{z2}}{\partial x_2} = -\frac{\partial B_{y2}}{\partial t_1}$$

Avec :

$$\begin{cases} E_{x2} = E_{x1} \\ E_{z2} = \frac{E_{z1}}{G_{12}} + \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{y1} \\ B_{y2} = \frac{B_{y1}}{G_{12}} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{z1} \end{cases}$$

D'où on a :

$$\frac{\partial}{\partial z_2}.E_{x2} - \frac{\partial}{\partial x_2}.(\frac{E_{z1}}{G_{12}} + \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{y1}) = -\frac{\partial}{\partial t_1}.(\frac{B_{y1}}{G_{12}} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{z1})$$

$$\frac{\partial E_{x1}}{\partial z_1} - \frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{E_{z1}}{G_{12}} + \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{y1}) - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.\frac{\partial}{\partial t_2}(\frac{E_{z1}}{G_{12}} + \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{y1})$$
$$= -\frac{c.B_{12}}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial x_1}.(\frac{B_{y1}}{G_{12}} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{z1}) - \frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial t_2}.(\frac{B_{y1}}{G_{12}} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{z1})$$

$$\frac{\partial E_{x1}}{\partial z_1} - \frac{1}{G_{12}^2}.\frac{\partial E_{z1}}{\partial x_1} - \frac{c.B_{12}}{G_{12}^2}.\frac{\partial B_{y1}}{\partial x_1} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}^2}.\frac{\partial E_{z1}}{\partial t_2} - \frac{B_{12}^2}{G_{12}^2}\frac{\partial B_{y1}}{\partial t_2}$$
$$= -\frac{c.B_{12}}{G_{12}^2}.\frac{\partial B_{y1}}{\partial x_1} - \frac{B_{12}^2}{G_{12}^2}.\frac{\partial E_{z1}}{\partial x_1} - \frac{1}{G_{12}^2}.\frac{\partial B_{y1}}{\partial t_2} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}^2}.\frac{\partial E_{z1}}{\partial t_2}$$

$$\frac{\partial E_{x1}}{\partial z_1} - \frac{1 - B_{12}^2}{G_{12}^2}\frac{\partial E_{z1}}{\partial x_1} = \frac{B_{12}^2 - 1}{G_{12}^2}.\frac{\partial B_{y1}}{\partial t_2}$$

$$\frac{\partial E_{x1}}{\partial z_1} - \frac{\partial E_{z1}}{\partial x_1} = -\frac{\partial B_{y1}}{\partial t_2}$$

Expression selon l'axe des $z$ :

$$\frac{\partial E_{y2}}{\partial x_2} - \frac{\partial E_{x2}}{\partial y_2} = -\frac{\partial B_{z2}}{\partial t_1}$$

Avec :

$$\begin{cases} E_{x2} = E_{x1} \\ E_{y2} = \frac{E_{y1}}{G_{12}} - \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{z1} \\ B_{z2} = \frac{B_{z1}}{G_{12}} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{y1} \end{cases}$$

D'où on a :

$$\frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial x_1}.(\frac{E_{y1}}{G_{12}} - \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{z1}) + \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.\frac{\partial}{\partial t_2}(\frac{E_{y1}}{G_{12}} - \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{z1}) - \frac{\partial E_{x2}}{y_2}$$
$$= -\frac{c.B_{12}}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial x_1}.(\frac{B_{z1}}{G_{12}} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{y1}) - \frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial t_2}(\frac{B_{z1}}{G_{12}} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{y1})$$

$$\frac{1}{G_{12}^2}.\frac{\partial E_{y1}}{\partial x_1} - \frac{c.B_{12}}{G_{12}^2}.\frac{\partial B_{z1}}{\partial x_1} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}^2}.\frac{\partial E_{y1}}{\partial t_2} - \frac{B_{12}^2}{G_{12}^2}.\frac{\partial B_{z1}}{\partial t_2} - \frac{\partial E_{x2}}{\partial y_2}$$
$$= -\frac{c.B_{12}}{G_{12}^2}.\frac{\partial B_{z1}}{\partial x_1} + \frac{B_{12}^2}{c.G_{12}^2}.\frac{\partial E_{y1}}{\partial x_1} + \frac{B_{12}^2}{G_{12}^2}.\frac{\partial E_{y1}}{\partial x_1} - \frac{1}{G_{12}^2}.\frac{\partial B_{z1}}{\partial t_2} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}^2}.\frac{\partial E_{y1}}{\partial t_2}$$

$$(\frac{1}{G_{12}^2} - \frac{B_{12}^2}{G_{12}^2}).\frac{\partial E_{y1}}{\partial x_1} - \frac{\partial E_{x1}}{\partial y_1} = (-\frac{1}{G_{12}^2} + \frac{B_{12}^2}{G_{12}^2}).\frac{\partial B_{z1}}{\partial t_2}$$

$$\frac{\partial E_{y1}}{\partial x_1} - \frac{\partial E_{x1}}{\partial y_1} = -\frac{\partial B_{z1}}{\partial t_2}$$

Conclusion

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_2} = -\frac{d\overrightarrow{B_2}}{dt_1}$$

$$div\overrightarrow{B_1} = 0$$

Implique

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_1} = -\frac{d\overrightarrow{B_1}}{dt_2}$$

De façon réciproque avec la même méthode, on pourrait monter que :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_1} = -\frac{d\overrightarrow{B_1}}{dt_2}$$

$$div\overrightarrow{B_2} = 0$$

Implique

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_2} = -\frac{d\overrightarrow{B_2}}{dt_1}$$

Le premier groupe des équations de Maxwell est donc invariant selon le groupe de transformation de Lorentz-Lafrénière

### 3.11.3 Deuxième groupe des équations de Maxwell

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B_2} = \frac{1}{c^2}.\frac{d\overrightarrow{E_2}}{dt_1}$$

$$div\overrightarrow{E_1} = 0$$

Expression selon l'axe des $x$ (axe de déplacement) :

$$\frac{\partial B_{z2}}{\partial y_2} - \frac{\partial B_{y2}}{\partial z_2} = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial E_{x2}}{\partial t_1}$$

Avec :

$$\begin{cases} B_{y2} = \frac{B_{y1}}{G_{12}} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{z1} \\ B_{z2} = \frac{B_{z1}}{G_{12}} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{y1} \\ E_{x2} = E_{x1} \end{cases}$$

D'où on a :

$$\frac{\partial}{\partial y_2}.(\frac{B_{z1}}{G_{12}} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{y1}) - \frac{\partial}{\partial z_2}(B_{y2} = \frac{B_{y1}}{G_{12}} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{z1}) = -\frac{\partial E_{x1}}{\partial t_1}$$

$$\frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial B_{z1}}{\partial y_1} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.\frac{\partial E_{y1}}{\partial y_1} - \frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial B_{y1}}{\partial z_1} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.\frac{\partial E_{z1}}{\partial z_1} = \frac{1}{c^2}.\frac{c.B_{12}}{G_{12}}.\frac{\partial E_{x1}}{\partial x_1} + \frac{1}{c^2}.\frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial E_{x1}}{\partial t_2}$$

$$\frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial B_{z1}}{\partial y_1} - \frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial B_{y1}}{\partial z_1} = \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.(\frac{\partial E_{x1}}{\partial x_1} + \frac{\partial E_{y1}}{\partial y_1} + \frac{\partial E_{z1}}{\partial z_1}) + \frac{1}{c^2}.\frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial E_{x1}}{\partial t_2}$$

Or on suppose que :

$$div\overrightarrow{E_1} = 0$$

$$\frac{\partial E_{x1}}{\partial x_1} + \frac{\partial E_{y1}}{\partial y_1} + \frac{\partial E_{z1}}{\partial z_1} = 0$$

D'où on déduit :

$$\frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial B_{z1}}{\partial y_1} - \frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial B_{y1}}{\partial z_1} = \frac{1}{c^2}.\frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial E_{x1}}{\partial t_2}$$

$$\frac{\partial B_{z1}}{\partial y_1} - \frac{\partial B_{y1}}{\partial z_1} = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial E_{x1}}{\partial t_2}$$

Expression selon l'axe des $y$ :

$$\frac{\partial B_{x2}}{\partial z_2} - \frac{\partial B_{z2}}{\partial x_2} = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial E_{y2}}{\partial t_1}$$

Avec :

$$\begin{cases} B_{x2} = B_{x1} \\ B_{z2} = \frac{B_{z1}}{G_{12}} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{y1} \\ E_{y2} = \frac{E_{y1}}{G_{12}} - \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{z1} \end{cases}$$

D'où on a :

$$\frac{\partial B_{x2}}{\partial z_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}.(\frac{B_{z1}}{G_{12}} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{y1}) = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial}{\partial t_1}.(\frac{E_{y1}}{G_{12}} - \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{z1})$$

$$\frac{\partial B_{x1}}{\partial z_1} - \frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{B_{z1}}{G_{12}} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{y1}) - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.\frac{\partial}{\partial t_2}(\frac{B_{z1}}{G_{12}} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{y1})$$
$$= \frac{1}{c^2}.\frac{c.B_{12}}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial x_1}.(\frac{E_{y1}}{G_{12}} - \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{z1}) + \frac{1}{c^2}\frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial t_2}.(\frac{E_{y1}}{G_{12}} - \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{z1})$$

$$\frac{\partial B_{x1}}{\partial z_1} - \frac{1}{G_{12}^2}.\frac{\partial B_{z1}}{\partial x_1} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}^2}.\frac{\partial E_{y1}}{\partial x_1} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}^2}.\frac{\partial B_{z1}}{\partial t_2} + \frac{B_{12}^2}{c^2.G_{12}^2}\frac{\partial E_{y1}}{\partial t_2}$$
$$= \frac{B_{12}}{c.G_{12}^2}.\frac{\partial E_{y1}}{\partial x_1} - \frac{B_{12}^2}{G_{12}^2}.\frac{\partial B_{z1}}{\partial x_1} + \frac{1}{c^2.G_{12}^2}.\frac{\partial E_{y1}}{\partial t_2} - \frac{B_{12}}{c.G_{12}^2}.\frac{\partial B_{z1}}{\partial t_2}$$

$$\frac{\partial B_{x1}}{\partial z_1} - \frac{1 - B_{12}^2}{G_{12}^2}\frac{\partial B_{z1}}{\partial x_1} = \frac{1}{c^2}.\frac{1 - B_{12}^2}{G_{12}^2}.\frac{\partial E_{y1}}{\partial t_2}$$

$$\frac{\partial B_{x1}}{\partial z_1} - \frac{\partial B_{z1}}{\partial x_1} = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial E_{y1}}{\partial t_2}$$

Expression selon l'axe des $z$ :

$$\frac{\partial B_{y2}}{\partial x_2} - \frac{\partial B_{x2}}{\partial y_2} = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial E_{z2}}{\partial t_1}$$

Avec :

$$\begin{cases} B_{x2} = B_{x1} \\ B_{y2} = \frac{B_{y1}}{G_{12}} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{z1} \\ E_{z2} = \frac{E_{z1}}{G_{12}} + \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{y1} \end{cases}$$

D'où on a :

$$\frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{B_{y1}}{G_{12}} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{z1}) + \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.\frac{\partial}{\partial t_2}(\frac{B_{y1}}{G_{12}} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}}.E_{z1}) - \frac{\partial B_{x1}}{y_1}$$
$$= \frac{1}{c^2}.\frac{c.B_{12}}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{E_{z1}}{G_{12}} + \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{y1}) + \frac{1}{c^2}.\frac{1}{G_{12}}.\frac{\partial}{\partial t_2}(\frac{E_{z1}}{G_{12}} + \frac{c.B_{12}}{G_{12}}.B_{y1})$$

$$\frac{1}{G_{12}^2}.\frac{\partial B_{y1}}{\partial x_1} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}^2}.\frac{\partial E_{z1}}{\partial x_1} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}^2}.\frac{\partial B_{y1}}{\partial t_2} + \frac{B_{12}^2}{c^2 G_{12}^2}.\frac{\partial E_{z1}}{\partial t_2} - \frac{\partial B_{x1}}{\partial y_1}$$
$$= \frac{B_{12}}{c.G_{12}^2}.\frac{\partial E_{z1}}{\partial x_1} + \frac{B_{12}^2}{G_{12}^2}.\frac{\partial B_{y1}}{\partial x_1} + \frac{1}{c^2 G_{12}^2}.\frac{\partial E_{z1}}{\partial t_2} + \frac{B_{12}}{c.G_{12}^2}.\frac{\partial B_{y1}}{\partial t_2}$$

$$(\frac{1}{G_{12}^2} - \frac{B_{12}^2}{G_{12}^2}).\frac{\partial B_{y1}}{\partial x_1} - \frac{\partial B_{x1}}{\partial y_1} = \frac{1}{c^2}.(\frac{1}{G_{12}^2} - \frac{B_{12}^2}{G_{12}^2}).\frac{\partial E_{z1}}{\partial t_2}$$

$$\frac{\partial B_{y1}}{\partial x_1} - \frac{\partial B_{x1}}{\partial y_1} = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial E_{z1}}{\partial t_2}$$

Conclusion

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B_2} = \frac{1}{c^2}.\frac{d\overrightarrow{E_2}}{dt_1}$$
$$div\overrightarrow{E_1} = 0$$

Implique

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B_1} = \frac{1}{c^2}.\frac{d\overrightarrow{E_1}}{dt_2}$$

De façon réciproque avec la même méthode, on pourrait monter que :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B_1} = \frac{1}{c^2}.\frac{d\overrightarrow{E_1}}{dt_2}$$
$$div\overrightarrow{E_2} = 0$$

Implique

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B_2} = \frac{1}{c^2}.\frac{d\overrightarrow{E_2}}{dt_1}$$

Le deuxième groupe des équations de Maxwell est donc invariant selon le groupe de transformation de Lorentz-Lafrénière

### 3.11.4 Cas particulier où les référentiels R1 et R2 sont confondus

Si les référentiels $R1$ et $R2$ sont confondus, alors on a :

$$t_1 = t_2$$

D'où l'on peut écrire indifféremment :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_1} = -\frac{d\overrightarrow{B_1}}{dt_1}$$

$$div\overrightarrow{B_1} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B_1} = \frac{1}{c^2}.\frac{d\overrightarrow{E_1}}{dt_1}$$

$$div\overrightarrow{E_1} = 0$$

Ainsi que :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_2} = -\frac{d\overrightarrow{B_2}}{dt_2}$$

$$div\overrightarrow{B_2} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B_2} = \frac{1}{c^2}.\frac{d\overrightarrow{E_2}}{dt_2}$$

$$div\overrightarrow{E_2} = 0$$

On retrouve ainsi l'expression des lois de Maxwell relatives au champ électromagnétique

## 3.12 Equation de propagation

### 3.12.1 Equation de propagation des champs relatifs

On a :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_2} = -\frac{d\overrightarrow{B_2}}{dt_1}$$

$$div\,\overrightarrow{E}_2 = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B_2} = \frac{1}{c^2}.\frac{d\overrightarrow{E_2}}{dt_1}$$

$$div\,\overrightarrow{B}_2 = 0$$

D'où on a :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_2}) = \overrightarrow{rot}(-\frac{d\overrightarrow{B_2}}{dt_1})$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_2}) = -\frac{d}{dt_1}(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B_2})$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_2}) = -\frac{d}{dt_1}(\frac{1}{c^2}.\frac{d\overrightarrow{E_2}}{dt_1})$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_2}) = -\frac{1}{c^2}(\frac{d^2\overrightarrow{E}_2}{dt_1^2})$$

Or, selon les règle du calcul laplacien, nous avons aussi :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_2}) = \overrightarrow{grad}(div\,\overrightarrow{E}_2) - \Delta\,\overrightarrow{E}_2$$

Avec :

$$div\,\overrightarrow{E}_2 = 0$$

D'où l'on déduit l'équation de propagation :

$$-\Delta\,\overrightarrow{E}_2 = -\frac{1}{c^2}\frac{d^2\overrightarrow{E}_2}{dt_1^2}$$

$$\Delta\,\overrightarrow{E}_2 - \frac{1}{c^2}\frac{d^2\overrightarrow{E}_2}{dt_1^2} = 0$$

De la même façon, on trouvera :

$$\Delta\,\overrightarrow{B}_2 - \frac{1}{c^2}\frac{d^2\overrightarrow{B}_2}{dt_1^2} = 0$$

Et de façon réciproque :

$$\Delta\,\overrightarrow{E}_1 - \frac{1}{c^2}\frac{d^2\overrightarrow{E}_1}{dt_2^2} = 0$$

$$\Delta\,\overrightarrow{B}_1 - \frac{1}{c^2}\frac{d^2\overrightarrow{B}_1}{dt_2^2} = 0$$

### 3.12.2 Cas particulier où les référentiels R1 et R2 sont confondus

Si les référentiels $R1$ et $R2$ sont confondus, alors on a :

$$t_1 = t_2$$

D'où l'on peut écrire indifféremment :

$$\Delta\,\overrightarrow{E}_1 - \frac{1}{c^2}\frac{d^2\overrightarrow{E}_1}{dt_1^2} = 0$$

$$\Delta\,\overrightarrow{B}_1 - \frac{1}{c^2}\frac{d^2\overrightarrow{B}_1}{dt_1^2} = 0$$

Ainsi que :

$$\Delta \overrightarrow{E}_2 - \frac{1}{c^2}\frac{d^2\overrightarrow{E}_2}{dt_2^2} = 0$$

$$\Delta \overrightarrow{B}_2 - \frac{1}{c^2}\frac{d^2\overrightarrow{B}_2}{dt_2^2} = 0$$

On retrouve ainsi l'expression de l'équation de propagation d'une onde en mouvement dans le milieu d'onde

# Chapitre 4

# Conclusion

Le nouveau groupe de transformation de Lorentz Lafrénière nous a permis de développer un ensemble de calculs relativistes cohérent, en manipulant des grandeurs relatives telles que vitesse, accélération, quantité de mouvement et champs électromagnétiques.

Comme nous l'avons mentionné dans Principe de relativité revisité - Edition II, ce groupe de transformation se base sur l'hypothèse d'une modification, en raison de leur mouvement, des longueurs des objets et des fréquences de leurs mécanismes faisant office de référence pour les calculs de durées. Ce groupe se base sur une hypothèse plus fondamentale encore, qui est la modification, en raison du mouvement des émetteurs et des récepteurs, des longueurs d'onde et des périodes d'onde des phénomènes vibratoires sous-jacents aux ondes électromagnétiques tout comme à la matière.

A l'issue de l'étude, nous avons pu mettre en évidence une forme généralisée des equations de Maxwell qui s'identifie aux équations déjà connues dans le cas particulier où les référentiels du champ magnétique inducteur et du champ magnétique induit sont confondus. Nous avons fait de même pour l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le milieu d'onde. Si nous avons eu recours à de tels calculs, c'est que leur cohérence est, à notre sens, une condition nécessaire pour attester la qualité du groupe de transformation nouvellement proposé et des hypothèses que nous lui avons associées.

# Annexe A

# Références - Bibliographie


- Albert Einstein
  - L'éther et la théorie de la relativité (1920)
  - Wikisource des travaux d'Albert Einstein : https://en.wikisource.org/wiki/Author:Albert_Einstein
- Hendrik Antoon Lorentz
  - Electromagnetic Phenomena in a System Moving with Any Velocity Smaller than that of Light (1904)
  - The Michelson-Morley Experiment and the Dimensions of Moving Bodies (1921)
  - Wikisource des travaux de Hendrik Lorentz : https://en.wikisource.org/wiki/Author:Hendrik_Lorentz
- Henri Poincaré
  - Sur la dynamique de l'électron (1905)
  - La Mécanique Nouvelle (1913)
  - Wikisource des travaux de Henri Poincaré : https://fr.wikisource.org/wiki/Auteur:Henri_Poincar%C3%A9
- Louis de Broglie
  - Recherches Sur La Théorie Des Quanta (1925)
  - Wikisource des travaux de Louis de Broglie works : https://fr.wikisource.org/wiki/Auteur:Louis_de_Broglie
- Gabriel Lafrénière
  - http://web.archive.org/web/20110901223405/http://glafreniere.com:80/matter.htm
- Valery P. Dmitriyev
  - Relativistic force transformation (2005)
  - https://arxiv.org/abs/physics/0507099
- Sur Wikipedia
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_ether_theory

# Annexe B

# A propos

Cette publication est basée sur une adaptation du modèle de thèse LaTeXconçu par Steve Gunn

Sunil Patel : http://www.sunilpatel.co.uk/thesis-template/

Les illustrations ont été générées à l'aide du logiciel libre Inkscape

https://inkscape.org/fr/