JVR

Journal of Vectorial Relativity
JVR **5** (2009) **1** 73-98

El Tiempo no es un Vector: Correcciones al Artículo Relatividad Vectorial versus Relatividad Especial o General?

J A Franco-Rodríguez

RESUMEN: En este trabajo se explican los principales errores conceptuales que se fueron introduciendo secuencialmente en el desarrollo de la Teoría Especial de la Relatividad (SR). Se da una deducción simple de las Transformaciones de Lorentz (LT) al estilo clásico y se resalta cómo una configuración rígida, repetida por más de cien años, conduce al primer error de una cadena, al declararse que *las componentes transversales al movimiento*, en el sistema de referencia inercial móvil, *no se afectan desde un punto de vista relativista*, y en base a un presunto "postulado de isotropía" se asumen iguales a las componentes medidas en el sistema inercial considerado fijo. Ello conduce a que dichas transformaciones sean igualmente erradas. Haciendo uso de la configuración general de un movimiento inclinado del sistema inercial móvil, respecto a ejes coordenados paralelos, se obtienen las transformaciones de distancia, tiempo y velocidad, diferentes a las LT, que se han dado en llamar Transformaciones Vectoriales de Lorentz (VLT). Se corrige en este trabajo también el error de considerar al tiempo como vector y se da un análisis crítico. Con base a estas primeras correcciones dentro de los fundamentos de la SR son definidas la Transformaciones Locales de Lorentz (LLT) lo cual permitió a su vez definir más completos los conceptos tanto de tiempo local como de magnitudes físicas locales. El primer error indicado dentro de la SR condujo indirectamente a obtener *una errónea definición del concepto de masa relativista, base de todas las definiciones de las magnitudes de la física dinámica (Energía. Momentos, Campos, etc.)*. Se da una deducción correcta de la definición de masa relativista y en consecuencia, la vía para corregir las de otras magnitudes dinámicas, como la de energía relativista la cual permite el desarrollo de la Mecánica Quántica Relativista. Por último, la expresión del campo gravitacional relativista es presentada y dicho concepto aplicado al cálculo de órbitas y de la precesión del perihelio de los planetas del sistema solar, obteniéndose valores muy precisos y acordes con las mediciones experimentales, lo cual ratifica la unicidad y validez de la relatividad vectorial frente a la "separación teórica aparente" existente entre la Relatividad Especial y la Relatividad General.

PALABRAS CLAVE: Transformaciones de Lorentz, Transformaciones Vectoriales de Lorentz, Masa, Energía, Campo Gravitacional, Órbitas Planetarias, Precesión del Perihelio de Mercurio.

INDEX

I. Introducción
Transformaciones de Lorentz versus Transformaciones de Galileo
Transformaciones Vectoriales de Lorentz versus Transformaciones de Lorentz
Generalización de las Transformaciones Vectoriales de Lorentz
II. Análisis Real de las Transformaciones Vectoriales de Lorentz
III. Tiempo Propio. Tiempo Local. Relatividad Especial y General
IV. Transformaciones Locales de Lorentz. Contracción de Longitud, Dilatación del Tiempo
Nueva Definición de la Masa Relativista
V. Nueva Definición de la Energía Relativista
VI. Nueva Versión Relativista de la Ecuación de Schrödinger

[1]Investigador independiente, Caracas, Venezuela, jafrancor@yahoo.com

VII. Nueva Definición del Campo Gravitacional Relativista
VIII. Cálculo de las Órbitas Planetarias bajo la Relatividad Vectorial
IX. Cálculo de la Precesión del Perihelio de los Planetas bajo la Relatividad Vectorial
X. Conclusión
Agradecimientos
Referencias

I. INTRODUCCIÓN

1) Transformaciones de Lorentz versus Transformaciones de Galileo. Las Transformaciones de Galileo son derivadas de considerar que el tiempo es el mismo en cualquier sistema inercial, y que el espacio y el tiempo son independientes. La configuración base, usada para obtenerlas y compararlas con las Transformaciones de Lorentz, es la de un sistema inercial restringido a moverse en forma rectilínea y a velocidad constante v, sobre el eje X de otro sistema inercial fijo, ambos sistemas con sus ejes paralelos, y un pulso de luz es disparado cuando ambos orígenes coinciden en $t=0$, ver la **Fig. 1**. las Transformaciones Galileanas (GT) que se deducen de dicha figura, aplicando el "sentido común" al movimiento de un fotón de luz, son:

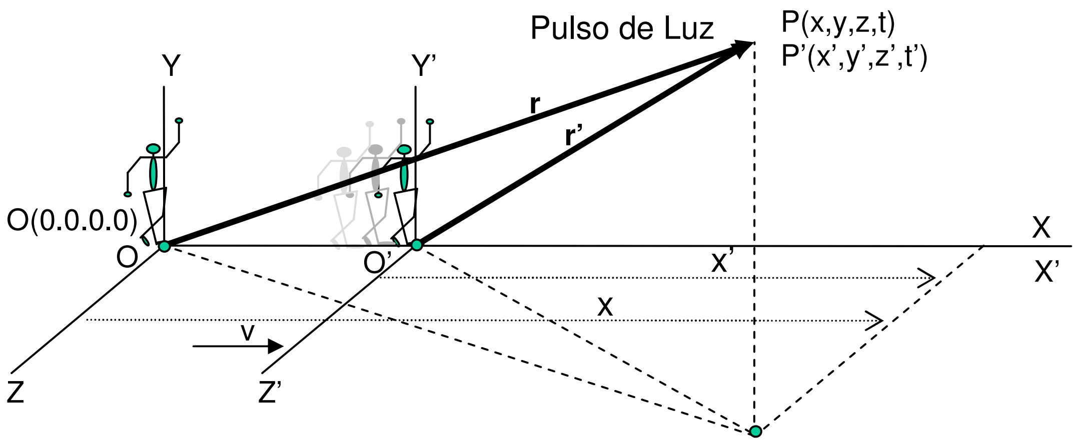

Fig. 1 "Movimiento tridimensional" para las Transformaciones de Lorentz

$$x' = x - v.t, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2.t^2, \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c'^2.t'^2 \tag{1}$$

Como es sabido, aún cuando las ecuaciones de Newton son invariantes a dichas transformaciones, las GT modifican la estructura de las ecuaciones de Maxwell, lo cual iba en contra del principio de la relatividad enunciada por el mismo Galileo. Y no solo eso, sino que dentro de ellas se consideraba a la velocidad de la luz como un valor no constante, $c' \neq c$, algo que chocaba contra lo esperado en los círculos científicos, pues de las referidas ecuaciones de Maxwell se deduce también que la velocidad de la luz, además de ser constante en su magnitud no depende de la velocidad de la fuente que la emite (en vacío, pues las características del medio dentro del cual se desplaza la luz, sí la modifican), ni tampoco de la velocidad del sistema desde el cual se le mide. Dentro del mundo científico esta inconsistencia constituyó una debacle para las Transformaciones Galileanas.

Las Transformaciones de Lorentz, sobre la base de reconocer la velocidad de la luz como una constante universal y que las leyes de la física son las mismas en cualquier sistema inercial, son logradas mediante la introducción de un factor k, a ser determinado, el cual permite matemáticamente, la preservación de la constancia de la velocidad de la luz; vale decir:

$$x' = k(x - v.t) \tag{2}$$

Este planteamiento, más la asunción siguiente: "dado que los ejes Y y Y' son paralelos, e igualmente Z y Z', y que el movimiento es sobre el eje X, es decir el eje X' desliza sobre el eje X a la velocidad v, aparentemente se debe cumplir la igualdad de las componentes $y' = y, \quad z' = z$", es decir:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2.t^2, \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2.t'^2 \tag{3}$$

Hagamos la siguiente reflexión: Si el movimiento del pulso de luz hubiese sido dirigido también coincidiendo con el eje X (se trataría de una configuración unidimensional), la velocidad de la luz, de igual valor en ambos sistemas, equivaldría al desplazamiento dividido por el tiempo, $c = x/t = x'/t'$, con lo cual, la transformación del tiempo se podría deducir de (2), directamente:

$$x' = k(x - v.t) \;\Rightarrow\; c.t' = k\left(c.t - v\frac{x}{c}\right) \;\Rightarrow\; t' = k\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{4}$$

Claro, con esta simplificación, la expresión indicada en (4) es sólo válida para una configuración unidimensional, como lo acabamos de ver. Sin embargo, puesto que las LT asumen $y' = y, \quad z' = z$, y no se observa dependencia funcional de estas componentes con el tiempo, podríamos comprobar si esta estructura del tiempo es también válida, para el caso de la configuración tridimensional graficada en la Fig. 1. Sustituyendo (2) y (4) en la segunda ecuación de (3), obtenemos:

$$k^2\left(x^2 + 2vxt + v^2t^2\right) + y^2 + z^2 = c^2k^2\left(t^2 - 2xtv/c^2 + x^2v^2/c^4\right)$$

Agrupando convenientemente para comparar coeficientes con la primera de las ecuaciones en (3):

$$\left(k^2 - k^2v^2/c^2\right)x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2\left(k^2 - k^2v^2/c^2\right) \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \;\Rightarrow\; k^2 - k^2v^2/c^2 = 1$$

Y observamos que puesto que la asunción obliga la igualdad entre los términos $y'^2 = y^2, \quad z'^2 = z^2$, la validez de la expresión (4) es automática para esta configuración tridimensional restringida, y se obtendría un valor de $k = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, igual al que se obtendría de la configuración unidimensional.

Como ya lo habíamos observado, esta configuración restringe el movimiento del sistema móvil a moverse solo sobre el eje X del sistema fijo. Sin embargo, en la literatura se resuelve esta limitación mediante rotaciones del eje de movimiento del sistema móvil, o asignando un eje arbitrario al movimiento del sistema móvil, al cual llaman eje de movimiento, y ejes perpendiculares a los otros dos ejes coordenados. Así, se mantiene intacta la asunción de considerar invariantes las componentes perpendiculares a la dirección del movimiento del sistema inercial móvil.

2) Transformaciones Vectoriales de Lorentz versus Transformaciones de Lorentz. A fin de obtener transformaciones entre componentes de ambos sistemas en los tres ejes coordenados (sin hacer restricciones, ni asunciones), el sistema móvil fue liberado a moverse sobre una línea inclinada que formara un ángulo β con el plano XY del sistema fijo y en el que la proyección de dicha línea sobre el mismo plano XY formara un ángulo α respecto al eje X (ver **Fig. 2**). De esta forma la dirección del movimiento del sistema móvil, puede ser cualquiera espacialmente, o coincidir con cualquiera de los tres ejes coordenados, dependiendo solo de los valores que se asignen a los ángulos α y β. Partamos, como antes, de la construcción de las Transformaciones Galileanas. Del análisis de la Fig. 2, se obtienen la Transformaciones Galileanas siguientes:

$$x' = x - v.t.cos\,\alpha.cos\,\beta, \qquad y' = y - v.t.sin\,\alpha.cos\,\beta, \qquad z' = z - v.t.sin\,\beta, \qquad t' = t$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2.t^2, \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c'^2.t'^2 \tag{5}$$

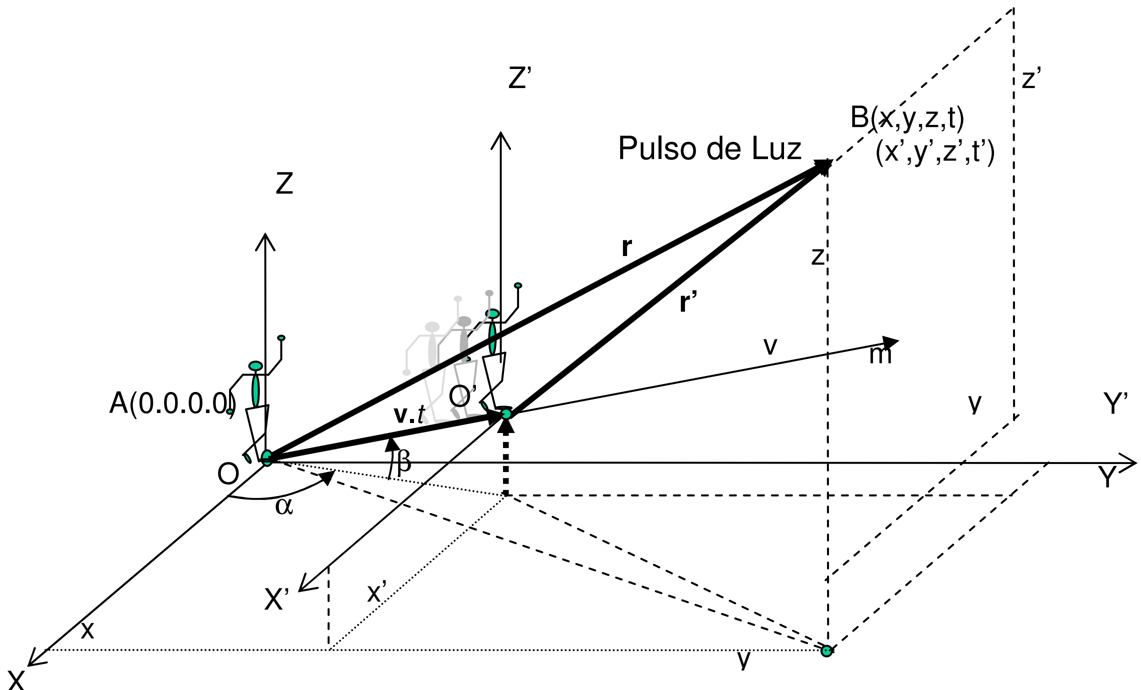

Fig. 2 Movimiento tridimensional, real y general

Las Transformaciones Vectoriales de Lorentz (VLT), en las cuales igualmente se reconoce que la velocidad de la luz es una constante universal y que las leyes de la física son las mismas en cualquier sistema inercial, son logradas mediante la introducción de un factor k en las transformaciones espaciales Galileanas anteriores, a ser determinado, el cual debe permitir, matemáticamente, la preservación de la constancia de la velocidad de la luz, es decir, en las VLT las transformaciones de distancia vendrían expresadas de la siguiente manera:

$$x' = k.(x - v.t.cos\,\alpha.cos\,\beta), \quad y' = k.(y - v.t.sin\,\alpha.cos\,\beta), \quad z' = k.(z - v.t.sin\,\beta)\,, \tag{6a}$$

Cumpliendo las relaciones siguientes, a fin de preservar constante la velocidad de la luz:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2.t^2, \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2.t'^2 \tag{6b}$$

Basándonos en las relaciones previas y haciendo cambios convenientes tratemos de obtener la transformación entre los tiempos. Sustituyendo y agrupando apropiadamente:

$$c^2.t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = k^2.\left[(x - v.t.cos\,\alpha.cos\,\beta)^2 + (y - v.t.sin\,\alpha.cos\,\beta)^2 + (z - v.t.sin\,\beta)^2\right]$$

$$c^2.t'^2 = k^2.\begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 + v^2.t^2.(cos\,\alpha.cos\,\beta)^2 + v^2.t^2.(sin\,\alpha.cos\,\beta)^2 + v^2.t^2.sin^2\,\beta \\ -2.v.x.t.cos\,\alpha.cos\,\beta - 2.v.y.t.sin\,\alpha.cos\,\beta - 2.v.z.t.sin\,\beta \end{bmatrix}$$

$$c^2.t'^2 = k^2\left[c^2.t^2 + v^2.t^2 - 2.v.x.(t.cos\,\alpha.cos\,\beta) - 2.v.y.(t.sin\,\alpha.cos\,\beta) - 2.v.z.(t.sin\,\beta)\right]$$

Dado que, $cos^2\alpha.cos^2\beta+sin^2\alpha.cos^2\beta+sin^2\beta\equiv 1\Rightarrow c^2.t^2\equiv c^2.t^2.(cos^2\alpha.cos^2\beta+sin^2\alpha.cos^2\beta+sin^2\beta)$

y que $t^2\equiv\dfrac{x^2+y^2+z^2}{c^2}\;\Rightarrow\; v^2.t^2\equiv v^2.\dfrac{x^2+y^2+z^2}{c^2}$, Sustituyendo y agrupando de nuevo, obtenemos:

$$c^2.t'^2=k^2.\left\{\begin{matrix}\left[c^2.(t.cos\alpha.cos\beta)^2-2.v.x.(t.cos\alpha.cos\beta)+v^2.\dfrac{x^2}{c^2}\right]+\left[c^2.(t.sin\alpha.cos\beta)^2-2.v.y.(t.sin\alpha.cos\beta)+v^2.\dfrac{y^2}{c^2}\right]\\+\left[c^2.(t.sin\beta)^2-2.v.z.(t.sin\beta)+v^2.\dfrac{z^2}{c^2}\right]\end{matrix}\right\}$$

$$c^2.t'^2=c^2.k^2.\left[\left(t.cos\alpha.cos\beta-\frac{v}{c^2}.x\right)^2+\left(t.sin\alpha.cos\beta-\frac{v}{c^2}.y\right)^2+\left(t.sin\beta-\frac{v}{c^2}.z\right)^2\right]\tag{7}$$

De la última relación se arriba a la transformación entre tiempos medidos por uno y otro observador:

$$t'^2=k^2.[(t.cos\alpha.cos\beta-\frac{v}{c^2}.x)^2+(t.sin\alpha.cos\beta-\frac{v}{c^2}.y)^2+(t.sin\beta-\frac{v}{c^2}.z)^2]\tag{8}$$

Observando detenidamente esta transformación, su expresión (8) sugiere, ***una interpretación vectorial del tiempo***, medido en el sistema móvil, como la siguiente:

$$\mathbf{t'}=k.\left(\mathbf{t}-\frac{v}{c^2}\mathbf{r}\right)\tag{9}$$

Aún cuando es un concepto en discusión, en artículos anteriores hemos conceptualizado de esta manera al tiempo, pero aparentemente no es correcta dicha interpretación del tiempo como un vector tridimensional y cuya rectificación o enmienda es la causa fundamental de este trabajo.

En efecto, desarrollaremos las posibles interpretaciones de la ecuación (8).

a) ***Tiempo como vector***. Obviamente, las expresiones de las transformaciones espaciales (6) pueden escribirse como una sola expresión vectorial, la cual junto con la ecuación (9) formarían el primer conjunto de ecuaciones independientes de las VLT indicadas en al primera parte de (10):

$$\begin{matrix}\mathbf{r'}=k.(\mathbf{r}-\mathbf{v}.t)\\ \mathbf{t'}=k.\left(\mathbf{t}-\dfrac{v}{c^2}\mathbf{r}\right)\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}\mathbf{r'}=k.(\mathbf{r}-v.\mathbf{t})\\ \mathbf{t'}=k.\left(\mathbf{t}-\dfrac{v}{c^2}\mathbf{r}\right)\end{matrix}\tag{10}$$

Pero, si le damos al tiempo la interpretación vectorial (9), se presentaría un primer problema: este vector tiempo deberá tener la dirección de la velocidad del sistema móvil, respecto al sistema fijo, como así se desprende de las ecuaciones (6) y (9) para arribar a la segunda parte de las ecuaciones (10). Luego, ello implicará que habrá que considerar a la velocidad como un escalar. Pero, supongamos que así fuese y que ¡aceptamos el comportamiento del tiempo como un vector y la velocidad como un escalar!. Obviamente, ello sería forzar la tergiversación conceptos del tiempo y de la velocidad. Pero, aún aceptando ambos conceptos forzados, todavía nos queda el problema de imaginar o deducir cuál es en realidad la dirección del vector tiempo medido desde el sistema móvil. Con estas dudas en esta interpretación probablemente equivocada, veamos la siguiente interpretación.

b) ***Tiempo como escalar y velocidad como vector. Primera parte***. Aún cuando ésta interpretación es menos problemática, debemos entonces investigar a que corresponde la estructura vectorial de la transformación del tiempo medido desde el sistema móvil. Trabajando un poco la ecuación (7), se origina una representación vectorial como la siguiente:

$$c^2.t'^2 = k^2.\left[\left(c.t.cos\alpha.cos\beta - \frac{v}{c}.x\right)^2 + \left(c.t.sin\alpha.cos\beta - \frac{v}{c}.y\right)^2 + \left(c.t.sin\beta - \frac{v}{c}.z\right)^2\right]$$

Para $\mathbf{u_v} = (cos\alpha.cos\beta).\mathbf{i} + (sin\alpha.cos\beta).\mathbf{j} + (cos\beta).\mathbf{k}$ y $\mathbf{c'}.t' = \mathbf{r'} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c'}.t' = k.t.\left(c.\mathbf{u_v} - \frac{v}{c}.\mathbf{c}\right)$ (11)

Pero, en primer lugar, el desarrollo que precedió a la ecuación (8) demuestra que la ecuación (11) no es independiente de la ecuación de las velocidades $\mathbf{r'} = k.(\mathbf{r} - \mathbf{v}.t) \Rightarrow \mathbf{c'}.t' = k.(\mathbf{c}.t - \mathbf{v}.t)$, característica ésta que descarta esta interpretación (b), y en segundo lugar, ello implicaría que la respuesta a la pregunta hecha al final de la parte anterior (a) es que la dirección del vector tiempo $\mathbf{t'}$ sería la del vector velocidad de la luz, medida en el sistema móvil y la dirección del vector tiempo $\mathbf{t}$, medido en el sistema fijo, tendría la dirección de la velocidad del sistema móvil en la ecuación $\mathbf{t'} = k.\left(\mathbf{t} - \frac{v}{c^2}\mathbf{r}\right)$.

Estas características son inconsistentes, lo cual descartaría también la interpretación (a) como válida.

c) ***Tiempo como escalar y velocidad como vector. Segunda parte***. Otra forma de interpretar la estructura vectorial de la expresión (8), proviene de multiplicar ambos lados de la ecuación por v^2, para obtener:

$$v^2.t'^2 = k^2.[(v.t.cos\alpha.cos\beta - \frac{v^2}{c^2}x)^2 + (v.t.sin\alpha.cos\beta - \frac{v^2}{c^2}.y)^2 + (v.t.sin\beta - \frac{v^2}{c^2}.z)^2] \qquad (12)$$

La cual daría siguiente ecuación vectorial independiente:

$$\mathbf{v'}.t' = k.\left(\mathbf{v}.t - \frac{v^2}{c^2}.\mathbf{c}.t\right) \quad \Leftrightarrow \quad v.t'.\mathbf{u'_v} = k.\left(v.t.\mathbf{u_v} - \frac{v^2}{c^2}.c.t.\mathbf{u_c}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u'_v} = k.\frac{t}{t'}\left(\mathbf{u_v} - \frac{v}{c}.\mathbf{u_c}\right) \qquad (13)$$

Obsérvese la semejanza de comportamiento del vector velocidad del sistema móvil con el vector velocidad de la luz. Similarmente a lo que ocurre con la dirección de la velocidad de la luz medida en uno y otro sistema de referencia ($\mathbf{c'} \neq \mathbf{c}$), pero de igual magnitud $|\mathbf{c'}| = |\mathbf{c}| = c$, la dirección del vector velocidad $\mathbf{v'}$ del sistema móvil respecto al sistema fijo, medida en el sistema móvil, es diferente de la medida en el sistema fijo $\mathbf{v}$, pero tienen la misma magnitud v. La ecuación $\mathbf{r'} = k.(\mathbf{r} - \mathbf{v}.t)$, expresada en función de $\mathbf{u_v}$ y de $\mathbf{u_c}$, junto con la anterior ecuación obtenida, constituyen el par de ecuaciones independientes siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{u'_c} &= k.\frac{t}{t'}\left(\mathbf{u_c} - \frac{v}{c}.\mathbf{u_v}\right) \\ \mathbf{u'_v} &= k.\frac{t}{t'}\left(\mathbf{u_v} - \frac{v}{c}.\mathbf{u_c}\right) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{u'_c} \\ \mathbf{u'_v} \end{bmatrix} = k.\frac{t}{t'}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{u_c} \\ \mathbf{u_v} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

d) ***Tiempo como escalar y velocidad como vector. Tercera parte***. Otra interpretación con la misma fundamentación anterior es la siguiente: definiendo el producto del vector velocidad del sistema móvil, medido respecto al sistema fijo, $\mathbf{v}$, por el tiempo t como el vector de posición del sistema móvil, $\mathbf{r_0} = \mathbf{v}.t$, y a $\mathbf{r_0}'$ como $\mathbf{r_0}' = \mathbf{v}'.t'$, obtenemos la siguiente representación vectorial de las ecuaciones (15), lográndose la constitución de un sistema de ecuaciones vectoriales que modela matemáticamente lo indicado en la Fig. 2, y que puede ser representada matricialmente, igual que las ecuaciones (14):

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}' = k.(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) && \mathbf{r}' = k.(\quad \mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \\ &\mathbf{r_0}' = k.\left(\mathbf{r_0} - \frac{v^2}{c^2}.\mathbf{r}\right) && \mathbf{r_0}' = k.\left(-\frac{v^2}{c^2}.\mathbf{r} + \mathbf{r_0}\right) \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix}\mathbf{r}' \\ \mathbf{r_0}'\end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{v^2}{c^2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r} \\ \mathbf{r_0}\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y} = A\mathbf{x} \tag{15}$$

Obsérvese que la segunda ecuación también puede ser visualizada vectorialmente más fácilmente pues se trataría de la suma de un vector negativo, $-\frac{v^2}{c^2}.\mathbf{r}$, más el vector de posición del sistema móvil, $\mathbf{r_0}$.

Si se cambian los roles de los sistemas inerciales, en el sentido de que consideremos ahora al sistema O como el móvil y al sistema O' como el fijo, obtendremos las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} &\mathbf{r} = k.(\mathbf{r}' + \mathbf{r_0}') && \mathbf{r} = k.(\quad \mathbf{r}' + \mathbf{r_0}') \\ &\mathbf{r_0} = k.\left(\mathbf{r_0}' + \frac{v^2}{c^2}.\mathbf{r}'\right) && \mathbf{r_0} = k.\left(\frac{v^2}{c^2}.\mathbf{r}' + \mathbf{r_0}'\right) \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix}\mathbf{r} \\ \mathbf{r_0}\end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{v^2}{c^2} & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}' \\ \mathbf{r_0}'\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = B\mathbf{y} \tag{16}$$

Observe que si sustituimos en la ecuación matricial vectorial anterior (16), la matriz $\mathbf{y}$ por su valor en (15), obtendremos que el producto de las matrices escalares BA deberá ser igual a la matriz unidad, lo cual da la condición para obtener el valor del factor k:

$$\mathbf{x} = B\mathbf{y} = BA\mathbf{x} \Rightarrow BA = I \Rightarrow \begin{bmatrix} k & k \\ \frac{k.v^2}{c^2} & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix} k & -k \\ -\frac{k.v^2}{c^2} & k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Así, de esta discusión determinamos que la interpretación vectorial (c) es la válida. Podemos observar que la interpretación (d) es realmente otra versión de la misma (c), aunque visualmente mas manejable. Esta conclusión corrige nuestros trabajos anteriores donde optamos por considerar, equivocadamente, como válida la interpretación (a). Sin embargo, como dicho error no modifica la definición de las Transformaciones Locales de Lorentz (LLT), el mismo no tiene repercusiones posteriores, es decir, no influye en los cálculos posteriores de este trabajo, los cuales han sido realizados con base a la aplicación de las LLT.

Dejaremos por ahora el tratamiento vectorial para continuar con el cálculo escalar interrumpido antes en la ecuación (8), para este caso general. Procederemos de manera similar a lo hecho previamente para obtener el valor del factor k, comparando los coeficientes del resultado de sustituir las ecuaciones (6a) y la expresión de la transformación de los tiempos (8) en la segunda ecuación de (6b) con los de la primera ecuación de (6b).

$$\begin{aligned} &c^2.k^2.[(t.\cos\alpha.\cos\beta - \frac{v}{c^2}.x)^2 + (t.\sin\alpha.\cos\beta - \frac{v}{c^2}.y)^2 + (t.\sin\beta - \frac{v}{c^2}.z)^2] = \\ &\qquad = k^2.\left[(x - v.t.\cos\alpha.\cos\beta)^2 + (y - v.t.\sin\alpha.\cos\beta)^2 + (z - v.t.\sin\beta)^2\right] \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left(k^2-k^2v^2/c^2\right)x^2+\left(k^2-k^2v^2/c^2\right)y^2+\left(k^2-k^2v^2/c^2\right)z^2=\left(k^2-k^2v^2/c^2\right)c^2t^2\\ x^2+y^2+z^2=c^2.t^2\end{array}\right\} \Rightarrow k=1\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Como vemos, todos los coeficientes deben ser iguales a la unidad y el valor del factor k para este caso es ratificado como un mismo resultado de la comparación de los coeficientes, acorde a lo esperado.

Por otra parte, las transformaciones (VLT) preservan invariante el intervalo del espacio-tiempo de la Teoría Especial de la Relatividad para un espacio de cualquier número de dimensiones, lo cual significa que esta nueva presentación de las Transformaciones de Lorentz, a la cual hemos denominado Transformaciones Vectoriales de Lorentz es válida no solo para la Luz sino para cualquier proyectil que se desplace a velocidades menores que las de la luz. Es decir, la igualdad siguiente se preserva: $c^2.t'^2-r'^2=\frac{c^2}{v^2}.v^2.t'^2-r'^2=\frac{c^2}{v^2}.r'^2_0-r'^2$. En efecto:

$$c^2.t'^2-r'^2=\sum_{j=1}^{N}\frac{c^2}{v^2}.k^2.\left(x_{0j}-\frac{v^2}{c^2}.x_j\right)^2-k^2.\sum_{j=1}^{N}\left(x_j-v.t_j\right)^2=k^2.\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{c^2}{v^2}\left(x_{0j}-\frac{v^2}{c^2}.x_j\right)^2-\left(x_j-v.t_j\right)^2\right]=$$

$$=k^2.\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{c^2}{v^2}\left(x_{0j}^2-2\frac{v^2}{c^2}x_{0j}.x_j+\frac{v^4}{c^4}.x_j^2\right)-\left(x_j^2-2.x_{0j}.x_j+x_{0j}^2\right)\right]=k^2.\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{c^2}{v^2}x_{0j}^2+\frac{v^2}{c^2}.x_j^2-x_j^2-x_{0j}^2\right]$$

$$=\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}.\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{c^2}{v^2}x_{0j}^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)-x_j^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]=\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{c^2}{v^2}x_{0j}^2-x_j^2\right]=\frac{c^2}{v^2}\sum_{j=1}^{N}\left[x_{0j}^2\right]-\sum_{j=1}^{N}\left[x_j^2\right]=\frac{c^2}{v^2}r_0^2-r^2=c^2.t^2-r^2$$

$$\Rightarrow c^2.t'^2-r'^2=c^2.t^2-r^2$$

Caso particular Aplicaremos las Transformaciones Vectoriales de Lorentz (VLT) a la configuración original de las conocidas Transformaciones de Lorentz (LT) en las que la línea inclinada sobre la cual se mueve el sistema móvil coincide con el eje X, es decir, forma ángulos, $\alpha=\beta=0$, ver **Fig. 1**, y así obtener las transformaciones, correctamente y sin asunciones. Las ecuaciones generales de las VLT con los orígenes coincidentes al inicio de las mediciones (3) y (4), acá repetidas, son:

$x'=k.(x-v.t.\cos\alpha.\cos\beta)$, $y'=k.(y-v.t.\sin\alpha.\cos\beta)$, $z'=k.(z-v.t.\sin\beta)$, con $k=\left(1-v^2/c^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$t'^2=k^2.[(t.\cos\alpha.\cos\beta-\frac{v}{c^2}.x)^2+(t.\sin\alpha.\cos\beta-\frac{v}{c^2}.y)^2+(t.\sin\beta-\frac{v}{c^2}.z)^2].$$

Particularizándolas a $\alpha=\beta=0$, a fin de repetir la configuración rígida de las LT originales, como veremos, dan transformaciones para las LT, distintas a las conocidas por más de cien años:

$$x'=\frac{x-v.t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ \boxed{y'=\frac{y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ z'=\frac{z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}\qquad t'=\sqrt{\frac{(t-\frac{v}{c^2}.x)^2+(-\frac{v}{c^2}.y)^2+(-\frac{v}{c^2}.z)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (17)$$

Como se demuestra en (17), las referidas asunciones de las LT, $y'=y,\quad z'=z$, **¡no son ciertas!.**

Como un chequeo de que las nuevas transformaciones obtenidas en (17) son correctas incluso para proyectiles cuya velocidad es menor que la de la luz, la demostración de la invariancia del intervalo s, responsable del que éstas sean unas transformaciones válidas, se da a continuación:

$$s^2 = r'^2 - c^2.t'^2 = \frac{(x-v.t)^2 + y^2 + z^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - c^2.\frac{\left(t-\frac{v}{c^2}.x\right)^2 + \left(\frac{v}{c^2}.y\right)^2 + \left(\frac{v}{c^2}.z\right)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} =$$

$$s^2 = r'^2 - c^2.t'^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2.v.t.x + v^2.t^2 - c^2.t^2 + 2.v.t.x - \frac{v^2}{c^2}.\left(x^2+y^2+z^2\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}} =$$

$$s^2 = r'^2 - c^2.t'^2 = \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right).\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right] - \left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]c^2.t^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = r^2 - c^2.t^2$$

Operando sobre las VLT, se obtienen las velocidades del proyectil particularizadas a la configuración de las LT originales:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{\sqrt{\left(1-\frac{v.u_x}{c^2}\right)^2 + \left(-\frac{v.u_y}{c^2}\right)^2 + \left(-\frac{v.u_z}{c^2}\right)^2}} \quad u'_y = \frac{u_y}{\sqrt{\left(1-\frac{v.u_x}{c^2}\right)^2 + \left(-\frac{v.u_y}{c^2}\right)^2 + \left(-\frac{v.u_z}{c^2}\right)^2}}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\sqrt{\left(1-\frac{v.u_x}{c^2}\right)^2 + \left(-\frac{v.u_y}{c^2}\right)^2 + \left(-\frac{v.u_z}{c^2}\right)^2}}$$

Se ratifica igualmente, como debía esperarse, que si el proyectil es un fotón de luz también ambos observadores deberán medir la misma velocidad de la luz, $u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = c^2$. En efecto:

$$u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z = \frac{(u_x - v)^2 + u_y^2 + u_z^2}{\left(1-\frac{v.u_x}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{v.u_y}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{v.u_z}{c^2}\right)^2} = \frac{u_x^2 - 2.v.u_x + v^2 + u_y^2 + u_z^2}{1-\frac{2.v.u_x}{c^2} + \frac{v^2.u_x^2}{c^4} + \frac{v^2.u_y^2}{c^4} + \frac{v^2.u_z^2}{c^4}} =$$

$$= \frac{\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) - 2.v.u_x + v^2}{1-\frac{2.v.u_x}{c^2} + \frac{v^2}{c^4}.\left(u_x^2 + u_x^2 + u_x^2\right)} = \frac{c^2 - 2.v.u_x + v^2}{1-\frac{2.v.u_x}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2.\left(1-\frac{2.v.u_x}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right)}{1-\frac{2.v.u_x}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}} = c^2$$

3) Generalización de las Transformaciones Vectoriales de Lorentz. Ambas configuraciones estudiadas en ***1)*** y ***2)*** están restringidas a que los orígenes de los sistemas fijo y móvil deban coincidir al momento de iniciar las mediciones. Es decir, el planteamiento invoca que un sistema inercial móvil O' se desplaza a velocidad constante v respecto al sistema fijo O. Para observadores en ambos sistemas, un proyectil es disparado en el instante $t_0 = t'_0 = 0$, cuando ambos orígenes coinciden en $x_0 = x'_0 = 0,\ y_0 = y'_0 = 0$ y $z_0 = z'_0 = 0$ y después de un lapso de tiempo t el proyectil alcanza un punto $P(x,\ y,\ z)$.

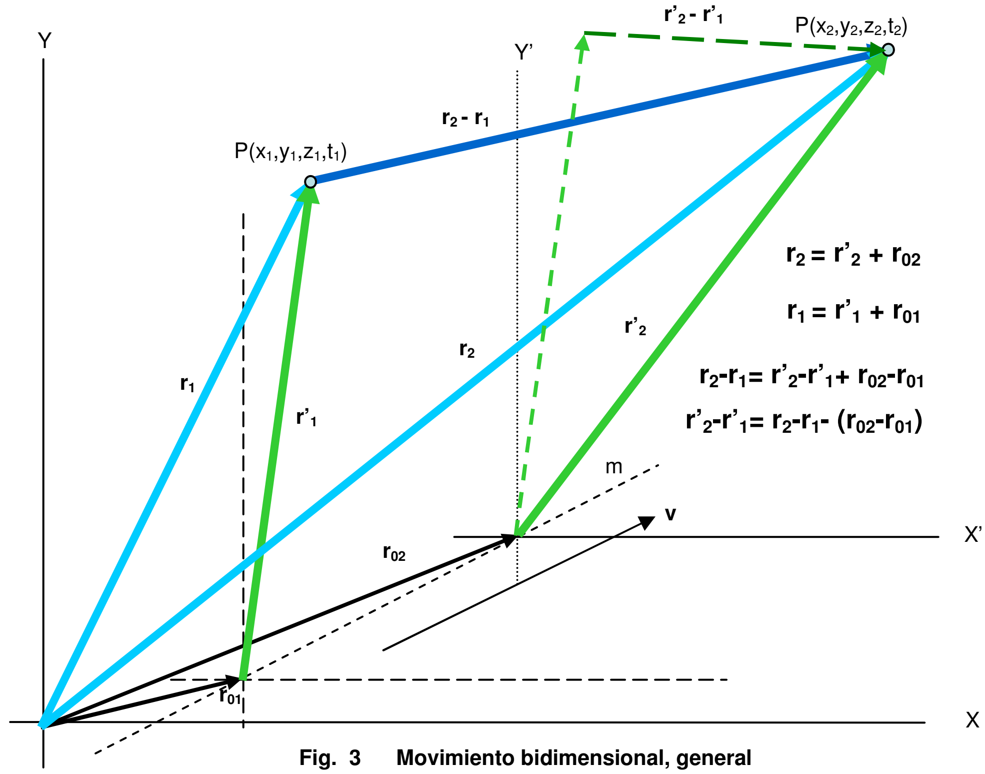

Fig. 3 Movimiento bidimensional, general

Así, la idea es liberar la restricción a que el proyectil pueda ser disparado desde un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ hasta que el mismo alcance el punto $P_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ y que el sistema móvil se desplace a velocidad v sobre una recta cualquiera *m* no coincidente con ningún eje. Haremos uso del diagrama vectorial bidimensional de la Fig. 3, lo cual no le quita generalidad a la representación vectorial y simplifica la visualización.

De la Fig. 3 observamos que la Transformación Galileana vectorial entre las distancias viene dada por: $\mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 - (\mathbf{r}_{02} - \mathbf{r}_{01}) \Rightarrow \Delta\mathbf{r}' = \Delta\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}_0$. De acá, de acuerdo al procedimiento que previamente hemos seguido, obtenemos las Transformaciones Vectoriales de Lorentz referidas a los desplazamientos vectoriales. Es decir:

$$\mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1' = k[\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 - (\mathbf{r}_{02} - \mathbf{r}_{01})] \Rightarrow \Delta\mathbf{r}' = k(\Delta\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}_0) \tag{18}$$

Donde se deberá cumplir igualmente que:

$$\mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1' = \mathbf{c}'.(t'_2 - t'_1) \Rightarrow \Delta\mathbf{r}' = \mathbf{c}'.\Delta t' \qquad \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 = c^2.\Delta t'^2$$
$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{c}.(t_2 - t_1) \Rightarrow \Delta\mathbf{r} = \mathbf{c}.\Delta t \qquad \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = c^2.\Delta t^2$$

De las expresiones escalares, procediendo como antes, se obtiene igualmente la transformación del tiempo:

$$\Delta t'^2 = k^2.[(\Delta t.cos\alpha.cos\beta - \frac{v}{c^2}.\Delta x)^2 + (\Delta t.sin\alpha.cos\beta - \frac{v}{c^2}.y)^2 + (\Delta t.sin\beta - \frac{v}{c^2}.\Delta z)^2]$$

Y, multiplicando por v^2, se obtiene la correspondiente expresión vectorial, que completa el juego de la matriz de ecuaciones vectoriales:

$$v^2\Delta t'^2 = k^2.[(\Delta t.v.cos\alpha.cos\beta - \frac{v^2}{c^2}.\Delta x)^2 + (\Delta t.v.sin\alpha.cos\beta - \frac{v^2}{c^2}.y)^2 + (\Delta t.v.sin\beta - \frac{v^2}{c^2}.\Delta z)^2]$$

$$v^2\Delta t'^2 = k^2.[(\Delta t.v_x - \frac{v^2}{c^2}.\Delta x)^2 + (\Delta t.v_y - \frac{v^2}{c^2}.y)^2 + (\Delta t.v_z - \frac{v^2}{c^2}.\Delta z)^2]$$

$$\Delta r_0'^2 = k^2.[(\Delta x_0 - \frac{v^2}{c^2}.\Delta x)^2 + (\Delta y_0 - \frac{v^2}{c^2}.y)^2 + (\Delta z_0 - \frac{v^2}{c^2}.\Delta z)^2]$$

$$\Delta\mathbf{r_0}' = k.\left(\Delta\mathbf{r_0} - \frac{v^2}{c^2}.\Delta\mathbf{r}\right) \qquad (19)$$

Eliminar la restricción de la coincidencia de los orígenes al inicio de las mediciones conduce a la forma natural e intuitiva para comparar movimientos relativos, con mediciones independientes. Por otra parte, la presentación incremental de las Transformaciones Vectoriales de Lorentz permite el posterior análisis de desplazamientos diferenciales. En efecto, las expresiones previas aplicadas al desplazamiento diferencial, el cual es relevante para su empleo en trayectorias curvilíneas, se transforman a:

$$d\mathbf{r}' = k.(d\mathbf{r} - d\mathbf{r_0}) \qquad d\mathbf{r_0}' = k.\left(d\mathbf{r_0} - \frac{v^2}{c^2}.d\mathbf{r}\right) \qquad d\mathbf{r}' = \mathbf{c}'.d\mathbf{t}' \qquad d\mathbf{r} = \mathbf{c}.d\mathbf{t} \qquad (20)$$

Y en forma escalar:

$$dx' = k.(dx - dx_0) \qquad dy' = k.(dy - dy_0) \qquad dz' = k.(dz - dz_0)$$

$$dx_0' = k.\left(dx_0 - \frac{v^2}{c^2}.dx\right) \qquad dy_0' = k.\left(dy_0 - \frac{v^2}{c^2}.dy\right) \qquad dz_0' = k.\left(dz_0 - \frac{v^2}{c^2}.dz\right)$$

$$dx_0 = dt.v.cos\alpha.cos\beta\,,\ \ dy_0 = dt.v.sin\alpha.cos\beta\,,\ \ dz_0 = dt.v.sin\beta\,,\ \ dr_0^2 = v^2dt^2 = v_x^2.dt^2 + v_y^2.dt^2 + v_z^2.dt^2$$

$$dt' = k.dt.\sqrt{\left(cos\,\beta.cos\,\alpha - \frac{v}{c^2}.\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(cos\,\beta.sin\,\alpha - \frac{v}{c^2}.\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(sin\,\beta - \frac{v}{c^2}.\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

La transformación para las velocidades del proyectil

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \mathbf{u} = \frac{(u_x - v.cos\alpha.cos\beta).\mathbf{i} + (u_y - v.sin\alpha.cos\beta).\mathbf{j} + (u_z - sin\beta).\mathbf{k}}{\sqrt{(cos\beta.cos\alpha - \frac{v}{c^2}.u_x)^2 + (cos\beta.sin\alpha - \frac{v}{c^2}.u_y)^2 + (sin\alpha - \frac{v}{c^2}.u_z)^2}}$$

Si el proyectil es un fotón o rayo de luz se cumple

$$\begin{Bmatrix} dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = c^2.dt'^2 \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2.dt^2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} c^2.dt'^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) = 0 \\ c^2.dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0 \end{Bmatrix}$$

II. ANÁLISIS REAL DE LAS TRANSFORMACIONES VECTORIALES DE LORENTZ

Cuando las expresiones previas se aplican a proyectiles distintos de un rayo de luz con velocidades menores que c, entonces las últimas diferencias, $r'^2 - c^2.t'^2$ y $r^2 - c^2.t^2$ o $dr'^2 - c^2.dt'^2$ y $dr^2 - c^2.dt^2$, son distintas de cero, pero toman un mismo valor s o ds sin importar quien las mida ($s' = s$ o $ds' = ds$), al cual se le conoce como el intervalo invariante del espacio-tiempo en la jerga de la Teoría Especial de la Relatividad (SRT):

$$\begin{Bmatrix} c^2.dt'^2 - \left(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2\right) = ds^2 \\ c^2.dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) = ds^2 \end{Bmatrix} \tag{21}$$

Además, la velocidad del proyectil medida en ambos sistemas responde a las relaciones siguientes:

$$\begin{Bmatrix} u'^2.dt'^2 - \left(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2\right) = 0 \\ u^2.dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) = 0 \end{Bmatrix}, \text{ Es decir: } \begin{Bmatrix} u'^2 = \dfrac{\left(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2\right)}{dt'^2} \\ u^2 = \dfrac{\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)}{dt^2} \end{Bmatrix}, \text{ para } u'^2 \neq u^2 \tag{22}$$

Y por supuesto lo mismo ocurre con los desplazamientos discretos, tanto para el rayo de luz como para cualquier proyectil que se desplace a una velocidad v menor que c:

$$\begin{Bmatrix} \left(x'_2 - x'_1\right)^2 + \left(y'_2 - y'_1\right)^2 + \left(z'_2 - z'_1\right)^2 = c^2.\Delta t'^2 \\ \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2 = c^2.\Delta t^2 \end{Bmatrix} \tag{23}$$

$$\begin{Bmatrix} c^2.\Delta t'^2 - \left[\left(x'_2 - x'_1\right)^2 + \left(y'_2 - y'_1\right)^2 + \left(z'_2 - z'_1\right)^2\right] = S_{12} \\ c^2.\Delta t^2 - \left[\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2\right] = S_{12} \end{Bmatrix} \tag{24}$$

La experiencia que podemos sacar de este análisis de la comparación de sistemas inerciales con movimientos relativos es que:

d) Efectivamente, una interdependencia entre el tiempo y el espacio tiene que existir para que la velocidad de la luz tenga un valor único y constante, sin importar la velocidad del sistema de referencia desde el cual se le mida ni tampoco la velocidad de la fuente que produjo dicha luz.

d) Es decir, los observadores que miden la velocidad de la luz no necesitan ponerse de acuerdo para medir las características físicas de la luz. Son totalmente independientes en sus mediciones. Su referencia puede ser un punto fijo de su planeta, o de la nave espacial en la que viaja, en fin, puede escoger cualquier punto fijo respecto de él mismo. Siempre obtendrá el mismo valor de la velocidad de la luz que otros obtuvieron.

c) Sin embargo, si un observador midiese la velocidad de la luz tomando como referencia un punto móvil, su medición ya no sería el mismo valor constante que obtendría si lo hiciera, como antes, relativo a un punto fijo de su sistema inercial. Por ejemplo, supongamos el caso de un observador que viaja en una nave espacial, y pasa cerca del Sol, al cual considera fijo en el espacio, y trata de medir la velocidad de un destello de luz azul que ocurre en un punto de la superficie del sol cada cierto tiempo. Cuando ocurre el destello azul, su nave está pasando al lado de dicho punto (perpendicular a la dirección de la velocidad del destello), paralelamente a la dirección del rayo de luz azul. Durante un tiempo t, él mide la distancia recorrida por el rayo de luz azul como si él lo hubiese emitido, tomando como referencia su nave espacial. Como resultado de su medición obtiene la velocidad de la luz, c. Sin embargo, si él hubiese medido la distancia recorrida por el rayo de luz desde el punto en la superficie del Sol (al cual dejó atrás) durante un tiempo t, la distancia recorrida por el rayo de luz sería igual a (v+c).t por lo que la velocidad del rayo azul, obtenido de esta manera, sería mayor que c e igual a v+c.

d) En resumen, las Trasformaciones Vectoriales de Lorentz implican que las distancias y tiempos de un evento cualquiera, medidos por observadores localizados en distintos sistemas inerciales (con movimiento relativo entre ellos) deben ser hechos por cada observador con respecto a un punto fijo de su sistema de referencia, en forma independiente y sin conocimiento del movimiento inercial del otro observador, o del movimiento relativo entre ellos. Si las mediciones, de la velocidad de un rayo de luz por ejemplo, no se hacen rigurosamente con estas referencias de la forma antes indicada se obtendrán mediciones y cálculos con resultados distintos a la velocidad de la luz.

III. TIEMPO PROPIO. TIEMPO LOCAL. RELATIVIDAD ESPECIAL Y GENERAL

El tiempo propio se define, dentro de la Teoría Especial de la Relatividad (abreviada SRT por sus siglas en inglés), como el tiempo relacionado al intervalo ds. Este intervalo, para una velocidad igual a la de la luz tiene un valor nulo, pero para velocidades menores que la de la luz tiene magnitud variable. Sin embargo, por ser igual para ambos observadores se le denomina intervalo invariante:

$$\left\{\begin{matrix} c^2.dt'^2-\left(dx'^2+dy'^2+dz'^2\right)=ds'^2 \\ c^2.dt^2-\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)=ds^2 \end{matrix}\right\}; \qquad ds'=ds \tag{25}$$

H. Minkowski [3] define el intervalo invariante ds, dentro de un espacio de cuatro dimensiones o tetra-dimensional, como el producto del tiempo propio por la velocidad de la luz $ds=c.d\tau$, es decir,

$$\left\{\begin{matrix} c^2.dt'^2-\left(dx'^2+dy'^2+dz'^2\right)=c^2.d\tau^2 \\ c^2.dt^2-\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)=c^2.d\tau^2 \end{matrix}\right\} \tag{26}$$

Una introducción a la explicación física de esta definición es abordada por L. D. Landau y L. M. Lifshitz [4] con un ejemplo particular. La siguiente exposición resume lo fundamental de tal introducción: "*se considera un sistema coordenado rígidamente unido a unos relojes que se mueven respecto de un observador fijo. Los relojes constituyen un sistema de referencia inercial. Durante un infinitesimal intervalo de tiempo dt (medido por un reloj en el sistema de referencia fijo) los relojes móviles se desplazan una distancia $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Mientras, en el sistema de coordenadas unido rígidamente a los relojes móviles, no se detecta ningún desplazamiento: $dx'=dy'=dz'=0$. Debido a la invariancia del intervalo ds, se cumple:*

$$ds^2=c^2.d\tau^2=c^2.dt^2-\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)=c^2dt'^2$$

de donde, por ser la velocidad de la luz invariante, también el tiempo propio $d\tau$, lo es:

$$d\tau = dt' = dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} \tag{27}$$

Pero,

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2 \tag{28}$$

Donde v *es la velocidad de los relojes móviles para este caso particular; pero* $d\tau$ *, en su definición más completa, se refiere al tiempo durante el cual se desarrolla el intervalo tetra-dimensional* ds *,* el cual, repetimos*, en este caso especial es igual al tiempo medido por los relojes móviles, y viene dado por la siguiente expresión":*

$$d\tau = dt' = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{29}$$

Esta relación es aceptada, sin mejores explicaciones, tanto en la Teoría Especial de la Relatividad (SR) como en la General (GR) como la expresión *general* en cuatro dimensiones del tiempo propio $d\tau$ *.* Esta generalización, como puede deducirse, no es rigurosamente válida.

La generalización de la expresión-definición del tiempo propio, así como quedó incrustada dentro de dichas teorías es confusa, por no decir que se trata de una definición incorrecta o incompleta, y ella conlleva junto con la referida asunción en las Transformaciones de Lorentz a transformaciones incorrectas de las magnitudes físicas, lo cual conduce a establecer que el ámbito de aplicación de la SR no es general. Y, obviamente no lo es por ambas incorrecciones .

Así como hemos logrado obtener de una manera correcta las Transformaciones Vectoriales de Lorentz, dando como consecuencia transformaciones uniformes a todas las componentes, en la próxima sección trataremos de definir el tiempo local como una definición más lógica y completa dentro de un ambiente tridimensional, "en contraposición" al tetradimensional del tiempo propio, siguiendo un razonamiento dentro del ámbito de las Transformaciones Vectoriales de Lorentz que hemos estado exponiendo y que conduce, como veremos, al desarrollo de la Teoría Vectorial de la Relatividad (VR).

IV. TRANSFORMACIONES LOCALES DE LORENTZ. CONTRACCIÓN DE LONGITUD, DILATACIÓN DEL TIEMPO. NUEVA DEFINICIÓN DE LA MASA RELATIVISTA

Como ya hemos indicado, para obtener las Transformaciones Vectoriales de Lorentz entre distancias y tiempos medidos por observadores ubicados en distintos sistemas inerciales con un movimiento relativo entre ellos, las mismas deberán ser realizadas por cada observador con respecto a, y desde, un punto fijo de su propio sistema de referencia, independiente del otro punto de referencia del otro observador. Ello implicará que además de las imperceptibles diferencias relativistas existirán las introducidas por el alejamiento o acercamiento de ambos puntos de referencia. La separación entre los orígenes de ambos sistemas de referencia es una cantidad que, por existir un movimiento relativo entre ellos es variable e igual a: $r_0 = v.\Delta t$.

Pero, ¿Como deben compararse resultados de medidas de magnitudes físicas en la realidad? En general, para comparar mediciones de características físicas se procura hacerlas bajo las mismas condiciones de medición. Sea por ejemplo el caso de un observador que viaja en un aeroplano y un segundo observador que está fijo en un lugar de la superficie de la Tierra. Ambos observadores desean comparar el resultado de sus mediciones, por ejemplo, de la velocidad del avión. Obviamente dichas mediciones deben ser hechas respecto a un punto fijo en la Tierra. El observador en la Tierra no tiene problemas para medir la velocidad del avión, pues él medirá la distancia recorrida por el avión respecto al punto fijo O, donde él se encuentra localizado en su sistema de referencia y el tiempo transcurrido en su reloj. Pero el observador que está en el avión tendrá que ingeniárselas para poder medir la velocidad del avión respecto a un punto fijo de la superficie de la Tierra, el cual puede ser el mismo punto de referencia del sistema fijo. Considérese primero al observador sentado en su butaca del avión, viajando en movimiento uniforme (velocidad constante de rotación a un radio constante respecto al centro de masa de la Tierra). Para él cualquier punto fijo del avión, estará en reposo. Y un punto fijo en superficie de la tierra se comportará para él realmente como un punto móvil. Es decir, para él lo que se mueve es el punto fijo tomado como referencia de medición en la superficie terrestre.

A fin de resolver como medir la velocidad del avión, en magnitud y dirección, y poder compararla con la del observador fijo en la Tierra, el observador que viaja en el avión debe seguir el siguiente procedimiento para obtener su resultado: tratará de medir la velocidad con la cual el punto O de la superficie terrestre se aleja del avión, al cual tomará como referencia permanente de sus mediciones. Para ello determinará el vector de posición del punto O en la Tierra, $\mathbf{R}'_0$, respecto a su avión. Obviamente este vector de posición $\mathbf{R}'_0$ tendrá <u>la misma dirección, pero será de sentido contrario al vector de posición del avión respecto a O,</u> $\overline{\mathbf{r}_0}$ (observe que no nos referimos a $\mathbf{r}'_0$, cuya dirección es diferente a la de $\mathbf{r}_0$, ver Fig. 4), cuyo valor será definido como $\mathbf{R}'_0 = k\left(-\overline{\mathbf{r}_0}\right)$. Luego, medirá la variación de la distancia del punto O respecto al avión en el tiempo, $\dfrac{d\mathbf{R}'_0}{dt'}$. Obtenida esta medición, se la resta a la velocidad del avión respecto a él (la cual tiene un valor nulo), $0-\dfrac{d\mathbf{R}'}{dt'}$, y así obtendrá la magnitud y dirección de la velocidad de su avión respecto al punto de referencia O (móvil para él, pero fijo para el otro observador) en la superficie terrestre.

El anterior procedimiento es la forma lógica de comparar velocidades y desplazamientos entre ambos observadores, lo cual permitiría observar sólo diferencias relativistas, eliminándose aquellas que provienen del movimiento relativo (distancia entre los orígenes de los sistemas de referencia). La comparación de tiempos entre dos observadores de sistemas inerciales con movimiento relativo entre ellos no tiene problemas aparentes de realización, pues son aquellos que se leen en los relojes ubicados en cada sistema de referencia. Lo mismo ocurriría con la comparación de mediciones de magnitudes de masas.

A este método de comparación de magnitudes físicas para encontrar transformaciones teniendo una sola referencia de medida, la denominaremos Transformaciones Locales de Lorentz [1]. Pero, como apuntábamos antes en el aparte c de la sección ***II***, la medición de la velocidad de la luz por ambos observadores no dará un mismo resultado, ni tampoco se mantendrá invariante el intervalo tetra-dimensional, pues como se ha visto se estarán variando las condiciones de medición originales de las VLT. Sin embargo, dado que se establece un solo punto de referencia de medición para ambos observadores, se está respetando una primera igualdad de condiciones de medición para longitudes. Por los resultados que veremos en lo adelante se demuestra que la transformación local así definida sigue siendo una transformación válida para la comparación de magnitudes físicas.

1) A fin de sistematizar el análisis de la Transformaciones Locales de Lorentz (LLT), de ahora y en lo adelante ambos observadores harán sus mediciones, como ya se ha se ha dicho, tomando

como referencia el mismo punto. Sea este punto el origen O del sistema fijo. Por ejemplo, si el observador fijo en O mide un radio-vector $\mathbf{R}$ (se usarán mayúsculas en LLT y minúsculas en VLT), desde O hasta un punto P de un proyectil enviado al espacio (las condiciones para esta medición son iguales a las de las VLT y $\mathbf{R}=\mathbf{r}$), el observador localizado en el sistema móvil medirá un radio-vector similar, $\mathbf{R}'$, entre los mismos dos puntos, cuya magnitud sería, según lo antes comentado y definido, igual a:

$$\mathbf{R'}=\mathbf{r'}-\mathbf{R'_0}=k(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})-k(-\mathbf{r_0})=k.\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R'}=k.\mathbf{r} \tag{30}$$

De acá obtenemos, consistentemente que $\mathbf{r}'$ tanto en LLT como en VLT tiene el mismo valor.

$$\mathbf{r'}=\mathbf{R'}+\mathbf{R'_0}=k(\mathbf{r})+k(-\mathbf{r_0})=k(\mathbf{r})-k(\mathbf{r_0})=k(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})$$

Observe que $\mathbf{r}'=k(\mathbf{r})-k(\mathbf{r_0})$, por ser una diferencia de dos radio-vectores que parten de la referencia común, él mantiene la equivalencia con el vector proveniente de las VLT. Sin embargo, $\mathbf{r_0}'$es un vector que aunque parte del origen O, no es medido respecto al sistema fijo O, sino respecto al sistema móvil O', véanse estas diferencias en la Fig. 4.

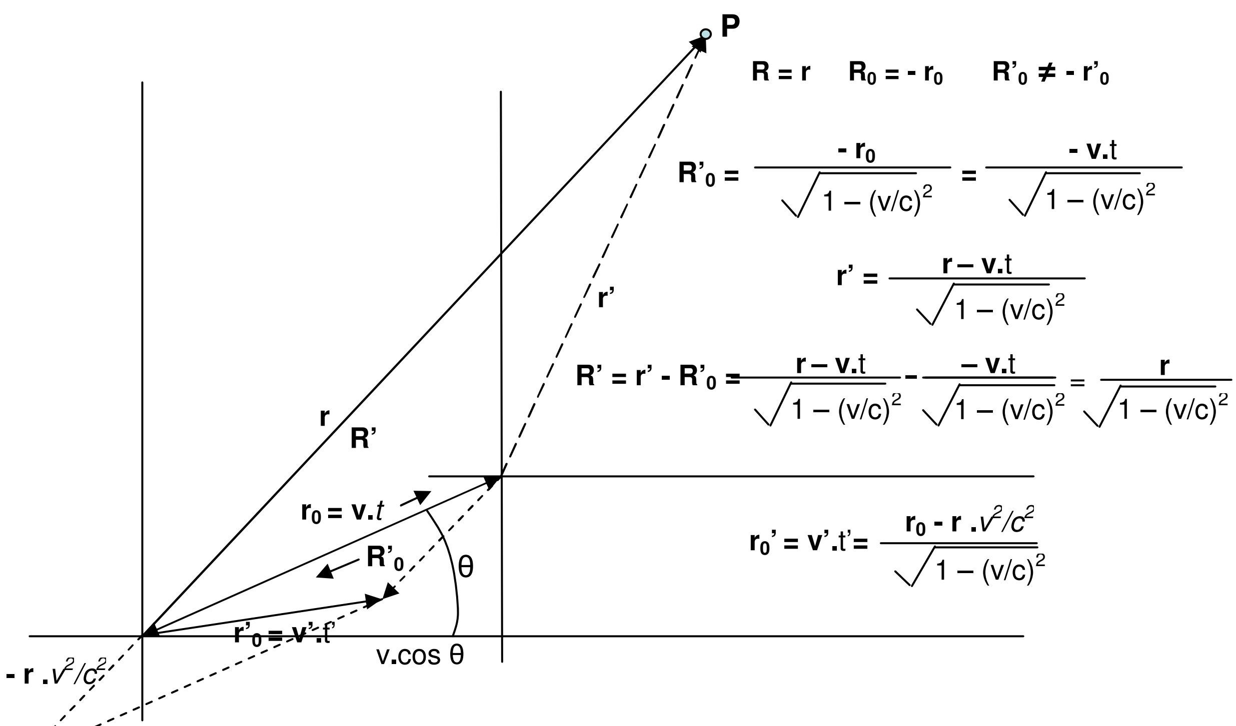

Fig. 4

Este resultado, ya nos indica que cuando hacemos medidas desde un punto común, las distancias o desplazamientos se relacionan como Transformaciones Locales de Lorentz y toman las expresiones indicadas en (30). Si las distancias medidas en el sistema móvil O', son consideradas como conocidas, se obtiene la cuantificación del fenómeno de la contracción de longitudes.

2) La siguiente sistematización o convención para terminar de definir las Transformaciones Locales de Lorentz se refiere a que no se disparará ningún proyectil. De esta manera el desplazamiento del proyectil será nulo respecto al sistema móvil, $\mathbf{r}'=0=k(\mathbf{r}-\mathbf{v}.t)$

$= \mathbf{R}'+\mathbf{R}'_{\mathbf{0}} = k(\mathbf{r}-\mathbf{r_0}) \Rightarrow \mathbf{R}' = -\mathbf{R}'_{\mathbf{0}}$, $\mathbf{r}=\mathbf{v}.t$, y coincidirán en longitud y dirección con $\mathbf{R}=\mathbf{r}$ y $\mathbf{R_0}=-\mathbf{v}.t$. Para este caso de desplazamiento nulo del proyectil, la anterior igualdad se reduce a:

$$\mathbf{r}=\mathbf{v}.t \qquad \Rightarrow \qquad x = t.v.cos\alpha.cos\beta; \;\; y = t.v.sin\alpha.cos\beta; \quad z = t.v.sin\beta$$

Sustituyendo estos resultados en la transformación original obtenida para el tiempo, ecuación (8):

$$t'^2 = k^2.[(t.cos\alpha.cos\beta - \frac{v}{c^2}.t.v.cos\alpha.cos\beta)^2 + (t.sin\alpha.cos\beta - \frac{v}{c^2}.t.v.sin\alpha.cos\beta)^2 + (t.sin\beta - \frac{v}{c^2}.t.v.sin\beta)^2]$$

Obtenemos la transformación Local correspondiente, similar a la indicada por L. D. Landau y L. M. Lifshitz [4].

$$t'^2 = k^2.t^2.\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)[(cos\alpha.cos\beta)^2 + (t.sin\alpha.cos\beta)^2 + (t.sin\beta)^2] = t^2.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (31)$$

3) El hecho de que en las LLT en general $\mathbf{R}'=k.\mathbf{r}$ y $\mathbf{R}'_0=-k.\mathbf{r}_0$, y que para este caso particular $\mathbf{R}'=k.\mathbf{R}=-\mathbf{R}'_0=-k.\mathbf{R}_0=k.\mathbf{r_0}$, para el punto origen del sistema móvil, el cual es un punto fijo para un observador localizado en el sistema móvil, podemos establecer que para cualquier punto fijo P'(x',y') del sistema móvil O', se cumple que los vectores de posición dentro de las LLT, transforman de igual manera. Es decir, el vector de posición de un punto P'$_1$(x'$_1$,y'$_1$) localizado fijo en el sistema móvil medido desde el punto O por un observador del sistema fijo será $\mathbf{R_1}=\mathbf{r_1}$, y el "mismo" vector de posición medido desde el mismo punto O por un observador del sistema móvil será $\mathbf{R'_1}=k.\mathbf{r_1}$. Igualmente para otro punto P'$_2$(x'$_2$,y'$_2$) , se tienen $\mathbf{R_2}=\mathbf{r_2}$ y $\mathbf{R'_2}=k.\mathbf{r_2}$, respectivamente. La distancia entre esos dos puntos se transforma conforme a la siguiente expresión $\Delta\mathbf{R'}=\mathbf{R}'_{\mathbf{2}}-\mathbf{R}'_{\mathbf{1}}=k(\mathbf{R_2}-\mathbf{R_1})$.

Con los resultados obtenidos podemos simplificar las Transformaciones Locales de Lorentz, para tiempos y distancias.

$$d\mathbf{R}' = \frac{d\mathbf{R}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow dX' = \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\;;\; dY' = \frac{dy}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\;;\; dZ' = \frac{dz}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\;;\; dt' = dt.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (32)$$

Obsérvese que los factores de Lorentz actúan uniformemente en cada componente, es decir las características físicas se contraen o expanden con el mismo factor dependiente de la velocidad.

Para un tiempo medido en los relojes del sistema móvil, t_0 , la transformación local del tiempo t medido en el sistema fijo es:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{(Dilatación del tiempo)} \qquad (33)$$

En forma discreta, la transformación local de Lorentz de una longitud L_0 entre dos puntos cualesquiera fijos del sistema móvil, 1 y 2, (cualquiera sea su orientación), es la siguiente:

$$\mathbf{R}'_2-\mathbf{R}'_1 = \frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad L_0 = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;\Rightarrow\; L = L_0.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad \text{(Contracción de longitud)} \qquad (34)$$

Ya en esta etapa de la presentación de la transformación local de Lorentz, se comienzan a destacar las bondades de su aplicación: no tenemos que estar preocupados por la coincidencia de la localización de eventos o de la simultaneidad de los mismos para advertir la dilatación del tiempo o la contracción de longitudes, previstas por Fitzgerald y Lorentz. Ni tampoco debemos preocuparnos por magnitudes transversales o longitudinales. Todas las dimensiones son afectadas de una manera uniforme por la velocidad del sistema móvil.

Por ejemplo, el área A' de un rectángulo fijo en el sistema móvil de lados ℓ'_1 y ℓ'_2, cualquiera sea su orientación, tendrá la siguiente transformación local:

$$A' = A_0 = \ell'_1.\ell'_2 = \frac{\ell_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.\frac{\ell_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{A}{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad\Rightarrow\quad A_0 = \frac{A}{1-\frac{v^2}{c^2}} \;\Rightarrow\; A = A_0.\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \tag{35}$$

E igualmente una caja de volumen de V_0, de lados ℓ'_1, ℓ'_2 y ℓ'_3 fija al sistema móvil:

$$V' = V_0 = \ell'_1.\ell'_2.\ell'_3 = \frac{\ell_1.\ell_2.\ell_3}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{V}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad\Rightarrow\quad V_0 = \frac{V}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow\; V = V_0.\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{36}$$

Como se puede observar, las transformaciones que se obtienen difieren de lo indicado en la SRT.

Una característica relevante de las Transformaciones Locales de Lorentz (LLT), es que el factor de Lorentz es característico para cada magnitud física (permite un análisis dimensional en base al factor) y actúa sin importar si se trata de una magnitud diferencial o integral.

Por ejemplo, el ángulo es una magnitud que proviene del cociente de dos longitudes: el arco y el radio. Así concluiremos que el ángulo es una cantidad invariante a las LLT:

$$\alpha' = \frac{s'}{R'} = \frac{\dfrac{s}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\dfrac{R}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{s}{R} \quad\Rightarrow\quad \alpha' = \alpha; \qquad d\alpha' = \frac{ds'}{R'} = \frac{\dfrac{ds}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\dfrac{R}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{ds}{R} \quad\Rightarrow\quad d\alpha' = d\alpha \tag{37}$$

De esta forma, ***la velocidad angular*** se transforma de la siguiente forma:

$$\omega' = \frac{d\alpha'}{dt'} = \frac{d\alpha}{dt.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\dfrac{d\alpha}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad\Rightarrow\qquad \omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{38}$$

Transformación Local de la Velocidad. Las mismas se obtienen diferenciando el desplazamiento respecto al tiempo:

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{R}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{r}/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{dt.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad\Rightarrow\qquad \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{39}$$

Obsérvese que si el observador móvil viajase a la velocidad de la luz, y midiese su velocidad respecto a un punto fijo, por ejemplo en la superficie terrestre (no respecto a su origen O'), él obtendría $c' = \dfrac{c}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$, es decir, no se obtiene que la velocidad de la luz sea un valor constante, como así fue indicado antes en el punto c) de la sección ***II***, como consecuencia de la variación de las condiciones de cálculo, ya comentado.

Similarmente, la transformación para la aceleración, se obtiene rápidamente:

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \frac{\dfrac{d\mathbf{v}}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{dt.\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}' = \frac{\mathbf{a}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{40}$$

Transformación Local de la Fuerza y de la masa. Dado que no conocemos la transformación de la masa, debemos recurrir a una configuración en la cual podamos deducir algunas relaciones físicas útiles. Consideremos dos masas m_1 y m_2 que rotan circularmente, debido a la atracción gravitatoria, alrededor del centro de masas CM del sistema formado por ambas masas. Ellas se mueven tal que la línea que une los centros de masa de cada una de las masas pasa a través de CM.

Gracias al movimiento circular de las masas que hemos impuesto, ello nos permitirá considerar solamente fuerzas centrífugas en el análisis. Ahora supongamos un Hércules localizado en el CM, fijo, sosteniendo cada masa a través de fuertes cordones con cada brazo. Con esta configuración consideraremos tres observadores, Hércules en el CM, como observador en la referencia fija, única. El primer observador móvil 1 sobre la masa m_1 a una distancia r_1 de CM, y el segundo observador móvil 2, sobre la masa m_2 a una distancia r_2 de CM.

<u>Consideraciones.</u>

1. Debido a que Hércules está en equilibrio, él medirá tensiones iguales y opuestas en cada brazo, producidas por fuerzas centrífugas iguales. Así, puesto que $T_1 = T_2 = T$, entonces,
$$m_1.\omega^2.r_1 = m_2.\omega^2.r_2 . \tag{41}$$

2. Debido a que la fuerza centrífuga medida por el observador 1 ubicado en la masa m_1 iguala la tensión que ejerce Hércules sobre la masa m_1, tendremos como resultado de las mediciones realizadas por el observador 1 que : $m'_1.\omega'^2.r'_1 = T'_1$.

3. Debido a que la fuerza centrífuga medida por el observador 2 ubicado en la masa m_2 es igual a la tensión que ejerce Hércules sobre la masa m_2, tendremos como resultado de las mediciones realizadas por el observador 2 que : $m''_2.\omega''^2.r''_2 = T''_2$.

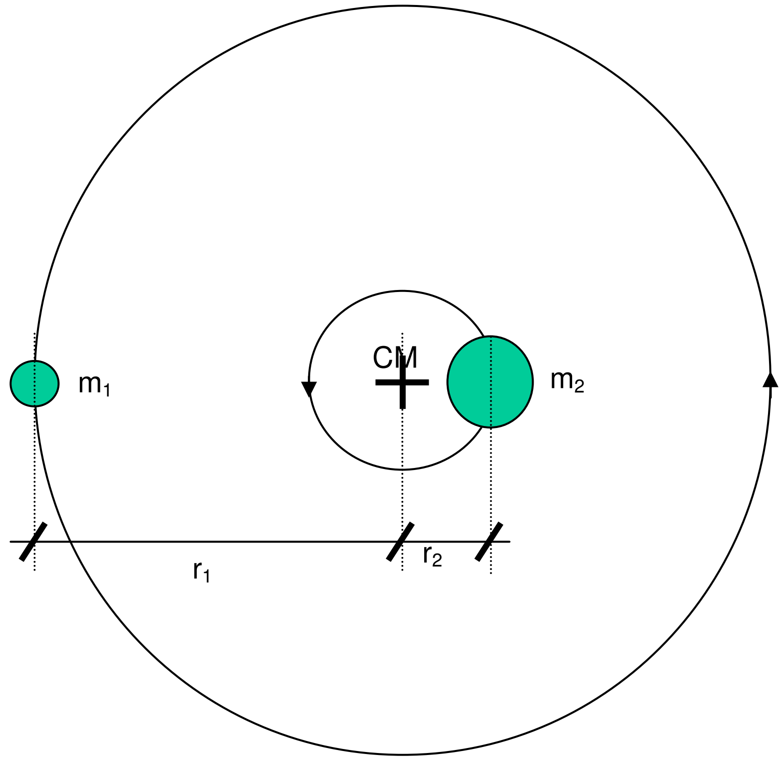

Fig. 3.

4. Con Hércules equilibrado, $T'_1 = T''_2$. Utilizando las LLT conocidas de las distancias (34) y de las velocidades angulares (38), y lo obtenido en 2 y 3, obtendremos:

$$m'_1.\omega'^2.r'_1 = m'_1.\frac{\omega^2}{\left(1-\frac{v_1^2}{c^2}\right)}.\frac{r_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} \equiv m''_2.\omega''^2.r''_2 = m''_2.\frac{\omega^2}{\left(1-\frac{v_2^2}{c^2}\right)}.\frac{r_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} \tag{42}$$

La única manera para que esta relación sea siempre consistente para cualquier valor de v_1 y v_2 es que las masas tengan la siguiente transformación local:

$$m'_1 = \left(1-\frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}.m_1 \quad \text{and} \quad m''_2 = \left(1-\frac{v_2^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}.m_2 \tag{43}$$

Con lo que los factores de Lorentz se cancelan y se arriba a la consideración válida 1, de donde partimos. Así, se consiguen las LLT de la masa, y de la fuerza (invariante), para este caso particular.

Puesto que las masas m'_1, m''_2 están en reposo respecto a cada observador, $m'_1 = m_{01}$ y $m''_2 = m_{02}$, se ratifica que la transformación local de Lorentz general de cualquier masa, vendría dada por:

$$m = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{44}$$

Obsérvese que este resultado es diferente del usado para la masa relativista en la SR.

Haciendo el análisis de la transformación local de la Fuerza por una vía más general, el mismo resultado será obtenido. Considérese ahora un ejemplo similar al anterior pero sin la restricción a la masa a moverse circularmente a velocidad constante, sino que tendrá una órbita genérica eclíptica producto de la atracción gravitacional, con velocidad y aceleración variables. Consideraremos además que no existen otras fuerzas gravitacionales actuando, por lo que se preservará la constancia del Momento Angular. Establezcamos que la masa m_2 en la **Fig. 3**, es la referencia única para mediciones a ser usadas para construir las LLT y a la cual llamaremos M , por lo que la masa m_1 será la masa móvil, y a la cual denominaremos m . De esta manera, el momento angular de la masa móvil medido desde M resulta, $m.r^2.\omega$, el cual debe ser un valor constante porque no hay más fuerzas actuantes. El "mismo" momento angular medido por el observador ubicado en la masa m es: $m'.r'^2.\omega'$, el cual también debe ser un valor constante. Sustituyendo por sus transformaciones Locales de Lorentz (LLT), en los casos conocidos, obtenemos:

$$m'.r'^2.\omega' = m'.\frac{r^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}.\frac{\omega}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = CONSTANT \qquad (45)$$

Al enfocarnos en esta última expresión y en sus elementos constituyentes, advertimos, que la única forma para que el momento angular sea constante, cualquiera sea el valor de la velocidad v, presente en los factores de Lorentz de los denominadores, es que la transformación para la masa cancele el efecto de tales factores y $m.r^2.\omega = m'.r'^2.\omega'$. Es decir, una LLT de la masa con la siguiente configuración cumple con tal condición:

$$m' = m_0 = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}.m \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (46)$$

Este es el mismo valor antes obtenido en (44) para la transformación de la masa en un caso particular, es decir, este resultado ratifica y generaliza dicha transformación. Ello significa que el Momento Angular es también invariante bajo las LLT (igual la Fuerza).

Dado que los factores de Lorentz influencian las magnitudes físicas uniformemente, las LLT son únicas para cada magnitud, hecho que contrasta con las diferencias entre transformaciones transversales y longitudinales de la masa, de los campos, etc. encontradas en la Teoría Especial de la Relatividad.

Otras Transformaciones locales de Lorentz pueden ser observadas en la referencia [1].

V. NUEVA DEFINICIÓN DE LA ENERGÍA RELATIVISTA

Es importante mencionar que debido a la nueva definición de masa presente en la ecuación (46), emerge también una nueva definición de la variación de energía cinética relativista de un cuerpo con masa m que se desplaza en movimiento curvilíneo o rectilíneo a velocidad $v < c$, diferente de la de ecuación general de Einstein ($E = m.c^2$), [6]:

$$K - K_0 = m.\left(2.v^2 - c^2\right) - m_0.\left(2.V_0^2 - c^2\right) \tag{47}$$

Siendo m_0 la masa del cuerpo a velocidad V_0 La cual se reduce consistentemente para $v << c$ y $m_0 \cong m$ a la conocida relación:

$$K - K_0 \cong \frac{1}{2}.m.v^2 - \frac{1}{2}.m.V_0^2 \tag{48}$$

De la ecuación (47) se desprende que, para un cuerpo como el fotón de luz, con masa m cuando se desplaza a la velocidad c, pero con masa nula en reposo, su energía cinética viene dada, también consistentemente, por:

$$K = m.c^2 \tag{49}$$

Según este resultado la validez de la famosa ecuación general de Einstein de la energía está restringida solo al caso del fotón.

La energía cinética de un cuerpo en movimiento, K, arrancando desde el reposo, $V_0 = 0$, con masa en reposo M_0 vendrá dada por

$$K = m.\left(2.v^2 - c^2\right) + M_0.c^2 \tag{50}$$

Por lo que la nueva definición de energía total será:

$$E = K + M_0.c^2 = m.\left(2.v^2 - c^2\right) + M_0.c^2 + M_0.c^2 = 2.M_0.c^2 - m.\left(c^2 - 2.v^2\right) \tag{51}$$

Para $v = 0 \Rightarrow m = M_0$, esta expresión se reduce consistentemente a la energía interna, $E_i = M_0.c^2$.

VI. VERSIÓN RELATIVISTA DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

Como podemos observar, la Energía relativista (51) dada por la relatividad vectorial depende directa y explícitamente de la velocidad de la partícula, característica que también la expresión clásica de la energía la tiene (base de la ecuación de Schrödinger), pero sin embargo la expresión de la energía relativista de Einstein no tiene esa dependencia explícita. Este aspecto favorable a la expresión de la Relatividad Vectorial, como veremos permite obtener una versión relativista de la ecuación de Schrödinger más completa que la de Klein-Gordon y probablemente que la de Dirac, pues la expresión (51) de la energía proviene de la definición correcta de la masa relativista.

Por ejemplo, bajo la relatividad vectorial la energía cinética de una partícula que parte del reposo ($K_0 = 0$) viene dada por:

$$K = 2.m.v^2 - m.c^2 + M_0.c^2 = 2.\frac{p^2}{m} - c^2.\left(m - M_0\right) \tag{52}$$

Formando la energía total E**,** que incluya la energía cinética, la interna y la potencial, a fin de asegurar que la energía total se preserve constante en cualquier caso (incluyendo aquellos casos en los cuales parte de la energía se convierta a cualquier otra clase de energía o haya intercambio masa-energía), tendremos:

$$E = K + M_0.c^2 + E_p = 2.m.v^2 - m.c^2 + 2.M_0.c^2 + E_p = 2.\frac{p^2}{m} - c^2.(m - 2.M_0) + E_p$$

$$E = 2.\frac{p^2}{m} - c^2.(m - 2.M_0) + E_p \qquad (53)$$

Este resultado nos recuerda el clásico Hamiltoniano: Así, nosotros podemos redefinir el Hamiltoniano relativista bajo la Relatividad Vectorial como:

$$H_{relativistic} = 2.\frac{\mathbf{p}^2}{m} - c^2.(m - 2.M_0) + E_p(\mathbf{r}) \qquad (54)$$

Reemplazando la energía total E por $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ y el momentum p por $i\hbar\nabla$, como así lo requiere la teoría de Schrödinger, obtenemos la versión relativista de la ecuación de Schrödinger, dependiente del tiempo :

$$-\frac{2.\hbar^2}{m}.\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \left[E_p - c^2.(m - 2.M_0)\right]\psi = j.\hbar.\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (55)$$

Una solución a esta ecuación se consigue mediante una función de dos variables separadas:

$$\psi(w,t) = \xi(x).e^{-\frac{j.E.t}{\hbar}} \; ; \qquad \text{donde,} \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{j.E}{\hbar}.\xi(x).e^{-\frac{j.E.t}{\hbar}} \; ; \;\; \text{y} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}.e^{-\frac{j.E.t}{\hbar}} \qquad (56)$$

Si sustituimos estos resultados en (55) obtendremos:

$$-\frac{2.\hbar^2}{m}.\frac{d^2\xi}{dx^2} + \left[E_p - c^2.(m - 2.M_0)\right]\xi = E.\xi \qquad (57)$$

La cual es la expresión relativista de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para una partícula libre.

VII. NUEVA DEFINICIÓN DE CAMPO GRAVITACIONAL RELATIVISTA

En trabajos anteriores fue obtenida la expresión del campo gravitacional relativista [7] [8] [9], ejercido por una masa considerada fija y constante M sobre otra considerada móvil m y variable de acuerdo a su velocidad tangencial v, localizada a una distancia entre sus centros r, es decir, el equivalente relativista del campo Gravitacional de Newton:

$$\mathcal{G}_{planet} = \frac{2.\frac{GM}{r^2}\frac{v}{V_0} - \left(\frac{p_0}{p} - \frac{p}{p_0}\right).\frac{v.dv}{dr}}{\left(\frac{p}{p_0} + \frac{p_0}{p}\right)}, \text{ el cual para el fotón se reduce a: } \mathcal{G}_{photon} = \frac{2.\frac{GM}{r^2}}{\left(\frac{p}{p_0} + \frac{p_0}{p}\right)} \qquad (58)$$

$G =$ Constante Gravitacional Universal
$p = m.v =$ Momentum o Cantidad de Movimiento

Observe que para un movimiento circular (velocidad constante), $\mathcal{G}_{planet} = \dfrac{GM}{r^2}$

VIII. CÁLCULO DE LAS ÓRBITAS DE PLANETAS BAJO LA RELATIVIDAD VECTORIAL

El resultado (52) se introduce en la ecuación de movimiento de un planeta [7] sometido a la influencia del campo gravitacional de un cuerpo masivo, y se obtiene:

$$\Rightarrow \quad u^2.\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=\frac{m^2}{L^2}.\mathcal{G}_{planet}=\frac{m^2}{L^2}\frac{\dfrac{2.G.M}{r^2}.\dfrac{v}{V_0}-v.\dfrac{dv}{dr}.\left(\dfrac{p_0}{p}-\dfrac{p}{p_0}\right)}{\left(\dfrac{p}{p_0}+\dfrac{p_0}{p}\right)} \qquad (59)$$

Para: $u=\dfrac{1}{r}$ y $L = m.r^2.\omega$: Momento Angular y ω =Velocidad angular del planeta

La ecuación (59) se resuelve en forma aproximada utilizando los siguientes resultados y definiciones de la Teoría Vectorial de la Relatividad [7] [9]:

(a) La nueva definición de masa relativista [6],

$$m=\frac{m_0}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (60)$$

(b) La nueva definición de Energía cinética relativista [2].

$$K - K_0 = \Delta K = m.(2.v^2 - c^2) - m_0.(2.V_0^2 - c^2) \qquad (61)$$

(c) La nueva definición de Velocidad tangencial [3].

$$v^2 = V_0^2.\frac{m_0^2}{m^2} - 2.G.M.\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right).\frac{m_0}{m} \qquad (62)$$

La ecuación (aproximada) para el Movimiento de planetas que resulta es:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + (1-6.\beta).u = \alpha \qquad (63)$$

Para $\alpha = \dfrac{M_0^2}{L^2}.\left(GM + 6.\dfrac{G^2M^2}{c^2.r_0}\right)$ y $\beta = \left(\dfrac{M_0.GM}{L.c}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d^2u}{d\theta^2} + (1-6.\beta).u = \alpha$ (64)

donde: M_0: Masa del planeta. (En reposo); r_0: Distancia mínima entre m y M.

La solución de la ecuación (63) es

$$u = \frac{\alpha}{1-6.\beta} + \left(u_0 - \frac{\alpha}{1-6.\beta}\right).\cos\left(\sqrt{1-6.\beta}.\theta\right) \tag{65}$$

Para, $u = 1/r$ y $\Delta = \sqrt{1-6.\beta}$ (66)

Definiendo $h' = \dfrac{\alpha}{1-6.\beta}$, obtenemos la expresión del ángulo: $\theta = \dfrac{1}{\Delta}.\arccos\left(\dfrac{\frac{1}{r} - h'}{\frac{1}{r_0} - h'}\right)$, (67)

El radio en función del ángulo sería entonces: $r = \dfrac{1/h'}{1 + \left(\frac{1}{r_0.h'} - 1\right).\cos(\Delta\theta)}$ (68)

Con estas expresiones se pueden calcular las órbitas de los planetas.

IX. CÁLCULO DE LA PRECESIÓN DEL PERIHELIO DE LOS PLANETAS BAJO LA RELATIVIDAD VECTORIAL

Para una revolución completa de la función u el ángulo total barrido es $\Delta\theta_c = 2\pi$. Por lo que el ángulo $\theta_c = \dfrac{2\pi}{\Delta}$. Así la expresión final de la precesión aproximada positiva por revolución, Π, es:

$$\Pi = \theta_C - 2\pi = \frac{2\pi}{\Delta} - 2\pi = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-6.\beta}} - 1\right) \cong 2\pi(1 + 3.\beta - 1) = 6.\pi.\beta = 6.\pi.\left(\frac{M_0.GM}{L.c}\right)^2 \tag{69}$$

$$\Pi \cong 6.\pi.\left(\frac{M_0.GM}{L.c}\right)^2$$

Los valores de la Precesión de los perihelios Obtenidos (tomados de la referencia [10]) fueron:

PLANETA	VTR (arc seg)	GTR (arc seg)
MERCURIO	*43.139*	*42.9195*
VENUS	*8.665*	*8.6186*
TIERRA	*3.8552*	*3.8345*
MARTE	*1.358*	*1.3502*
JUPITER	*0.0624*	*0.0623*
SATURNO	*0.0137*	*0.0137*
URANO	*0.0024*	*0.0024*
NEPTUNO	*0.00077*	*0.0008*
PLUTON	*0.00042*	*0.0004*

Tabla 1. Precesión de perihelios por centuria dados por la VTR y la GTR.

X. CONCLUSIÓN

Este trabajo, igual que anteriores, es concluyente en la demostración de que el pecado original de la Teoría Especial de la Relatividad fue el no haber corregido el error contenido en la asunción de la invariancia de las componentes transversales al movimiento. La complicación que ello introdujo a la teoría impidió su sano desarrollo: las incorrectas transformaciones de magnitudes físicas, entre ellas la incorrecta definición de la masa relativista, lo cual conlleva a una definición deficiente de la Energía y del Momento (y en general de las definiciones a la Física Dinámica). Adicionalmente, la incompleta concepción del tiempo propio o local, terminó por complicar la Teoría Especial de la Relatividad, a nuestro juicio. Creemos que las correcciones introducidas por la Relatividad Vectorial en los conceptos relativístas permitirán una mejor comprensión del la Teoría de la Relatividad, dado su desarrollo tridimensional y a la sazón un mejor entendimiento entre cuánticos y relativistas, pues ambos campos son parte de la física y no interpretaciones diferentes de la física, es decir, no se trata de una característica excluyente de la otra sino que ambas son características de la materia. Así, cada partícula tiene masa y tiene una onda que depende de su velocidad, es decir, ellas son propiedades características naturales y generales de la materia. Dado el carácter unificador de la Relatividad Vectorial por la nueva definición la energía dependiente directamente de la velocidad; lo fácil de la concepción de una masa que varía con la velocidad; la simpleza del razonamiento dentro de un ambiente tridimensional; la uniformidad con que la velocidad dentro del factor de Lorentz contrae las medidas métricas, expande al tiempo y a la masa, y a los campos, de una forma tan lógica y específicamente tan particular que dicho factor puede servir de control dimensional en los cálculos; la presentación de las fórmula físicas con su variación proveniente de la dependencia de la velocidad relativa y la concordancia de sus predicciones con los resultados experimentales, en concusión hacen esta teoría mucho más accesible, simple y teóricamente más general que la Teoría Especial (SR), esta última aplicable sólo a movimientos rectilíneos pero con dependencia de la masa con la velocidad, y que la Teoría General (GR) en la cual la masa no varía con la velocidad (¡!) por ser su movimiento considerado sobre geodésicas (?).

Agradecimientos: Queremos agradecer al Dr. Serguei G. Fedosin, de Perm State University, Rusia, por su infinita paciencia en la discusión de los temas y a la clara exposición de sus valiosos comentarios.

REFERENCTAS

[0] A Einstein. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper,* Annalen der Physic **17:**891, 1905. English version prepared by John Walker. *On the Electrodynamics of Moving Bodies.*

[1] J A Franco R, *Vectorial Lorentz Transformations.* 2006. EJTP 9 (2006) 35-64.

[2] J G Quintero D and J A Franco R. *Time as a Vector and Vectorial Lorentz Transformations*. November 16th 2006. JVR **1** (2006) **1** 8-21.

[3] H Minkowski *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*

[4] L D Landau, E M Lifshitz. Vol 2. *The Classical Theory of Fields.* Fourth edition, english translation (Russian 1973)

[5] J G Quintero D and J A Franco R. *Local Lorentz Transformations and Vectorial Relativity* JVR **1** (2006) 22-32

[6] J A Franco R. *Energy in Vectorial Relativity:* $E \approx m.c^2$. JVR **1** (2006) 43-55.

[7] J A Franco R. *First Solutions to Gravitation and Orbital Precession under Vectorial Relativity.* March 16th 2008. JVR **3** (2008) **1** 1-13.

[8] J A Franco R. *Theoretical Result of Deflection of Light Under General Relativity Could Be Wrong*. Junio 16 2008. JVR **3** (2008) **2** 1-21.

[9] J G Quintero D and J A Franco R. *Gravitational Forces in Vectorial Relativity.* Published by JVR on March 16th 2007. JVR **2** (2007) **1** 33-42.

[10] E Valdebenito V: *Estimation of Planetary Orbits via Vectorial Relativity*. September 16th 2008. JVR **3** (2008) **4** 33-41.

[11] J G Quintero D and J A Franco R. *Quantum Mechanics in Vectorial Relativity*. Published by JVR on March 16th 2007. JVR **2** (2007) **1** 14-21.