Tenseur Energie Impulsion Quantique Relativiste : Approximation Linéaire de l'Equation d'Einstein et Equivalence avec l'Equation de Klein-Gordon

Roman Baudrimont
Chercheur Indépendant
RomanBaudrimont.cd@gmail.com

[!] Attention [!]
Je publie ce document en présentant que la partie 1 et 2. Ce document n'est donc pas complet et est toujours en cours de réalisation. Quand le document complet sera publié, il s'intitulera « *Tenseur énergie impulsion quantique relativiste et entropie de Von Neumann* ». Les parties 1 et 2 présentés ne sont pas encore totalement complète. Je m'excuse pour les lecteurs qui auront du mal à suivre mes calculs ainsi que ma logique. Je m'excuse aussi pour les fautes d'orthographe et de grammaire.

Abstract : Notre objectif dans ce papier (partiel) est d'étudier le lien qui existe entre l'approximation linéaire des équations d'Einstein (ou approximation des champs faibles) à l'équation de Klein-Gordon. La partie 1 présente ce qu'est l'équation de Klein-Gordon ainsi que l'intégration de la théorie de l'information quantique en son sein. La partie 2 traite du tenseur énergie impulsion quantique, dans lequel je détail l'approximation des champs faibles de l'équation d'Einstein, puis dans lequel je développe le tenseur énergie impulsion quantique à partir de l'équivalence entre l'équation d'einstein à l'approximation des champs faibles et l'équation de Schrödinger relativiste décrit par l'équation de Klein-Gordon.

Keys Word : Stress Energy Tensor, Quantum Mechanics, Von Neumann Entropy, Quantum Field Theory

Part 1 – Equation de Klein-Gordon.

Part A – Introduction à l'équation de Klein-Gordon.

L'équation de Klein-Gordon [1] est une version relativiste de l'équation de Schrödinger décrivant des particules massives de spin nul et, dans notre cas, sans charge électrique. Je vais donc ici faire un rappel de cette équation.

Tout d'abord, réécrivons l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \hat{H}\psi(\vec{r},t)$$

Avec $\hat{H}$, l'opérateur Hamiltonien :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r},t)$$

On remarque que l'Hamiltonien donne l'énergie total du système avec $\hbar$ la constante de Planck réduite correspondant à l'impulsion, $-\hbar^2\Delta/(2m)$ correspond donc à l'énergie cinétique, $V(\vec{r},t)$ à l'énergie potentielle du système. Le delta (Δ) est un Laplacien.

On va partir de l'invariant relativiste donnant l'énergie d'une particule isolée. En relativité restreinte, l'équation est la suivante :

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = \vec{p}\cdot\vec{p} + m^2c^4$$

Nous allons maintenant partir du principe de correspondance (lorsque le comportement quantique d'un système peut se réduire à un comportement de physique classique). Nous avons alors ses deux principes de correspondances :

$$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\vec{p} = i\hbar\vec{\nabla}$$

Avec $\vec{\nabla}$ l'opérateur nabla.
On obtient alors l'équation suivante :

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\vec{r},t) = -\hbar^2c^2\nabla^2\psi(\vec{r},t) + m^2c^4\psi(\vec{r},t)$$

Que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\Delta\psi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\vec{r},t) = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r},t)$$

Avec $\Delta = \nabla^2$. On peut alors introduire l'opérateur Alembertien, qui s'écrit ainsi :

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Ce qui donne finalement :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\vec{r},t) = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r},t)$$

Voici donc l'équation de Klein Gordon. Toutefois, celle-ci pose problème lorsque l'on veut calculer la densité de probabilité. Je ne vais pas rentrer les détails, mais simplement expliquer le problème de fond. Lorsque l'on calcul la densité de probabilité, on se retrouve face à un souci majeur ; en effet, on obtient :

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$$

De manière plus synthétique, si on calcul en partant d'une fonction d'onde simple, décrite de la manière suivante, avec A est l'amplitude de l'onde, et $\vec{p}$ le vecteur d'impulsion [2] :

$$\psi(\vec{r},t) = Ae^{i(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})}$$

Et que nous calculons la densité de probabilité suivante :

$$\rho = i\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$$

Nous obtenons ceci :

$$\rho = 2EA^2$$

L'expression de la densité de probabilité dépend alors entièrement de E, l'énergie. Comme l'énergie peut être négative, cela laisse supposer que la densité de probabilité peut être aussi négative. On doit alors utiliser une équation qui décrit, comme l'équation de Schrödinger, une équation de premier ordre selon les dérivées du temps et pour laquelle la densité de probabilité est définie positive, respectant ainsi les principes de relativité restreinte et mécanique quantique, l'équation de Dirac.

Toutefois, la physique quantique dit que le calcul de probabilité peut s'effectuer en calculant simplement la norme au carré de la fonction d'onde. Dans ce cas, le problème concernant la négativité possible de la densité de probabilité est réglé. Maintenant, nous allons voir qu'il est possible d'intégrer l'information quantique à l'équation de Klein-Gordon.

Part B – Equation de Klein-Gordon et information quantique.

Avant de calculer en théorie de l'information quantique, nous allons partir sur l'équation de l'onde de Broglie, dans lequel l'onde se propage selon l'axe des z [3].

$$\psi(\overrightarrow{r}, t) = \psi_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

On peut alors définir le champ électrique, donné par l'équation suivante [3] :

$$\bar{E}(\overrightarrow{r}, t) = \bar{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

Le vecteur $\bar{E}_0$ est donné par l'équation suivante :

$$\bar{E}_0 = E_0 \hat{e}_x + E_0 \hat{e}_y$$

On remarque que $\bar{E}_0$ est un nombre complexe qui définit la polarisation de l'onde.

Dans le cadre de la théorie de l'information quantique, nous pouvons utiliser la formulation ci-dessus qui permet de définir la polarisation de l'onde pour modifier l'équation de Klein Gordon et ainsi l'adapter à l'information quantique. On pourrait par exemple étudier la position / le mouvement d'une particule en définissant une amplitude de probabilité des différentes polarisations possibles de la particule. Ainsi, si nous écrivons [4] :

$$|\psi\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$$

Que nous pourrions généraliser en tant que fonction complexe, pour laquelle l'amplitude de probabilité donné par les complexes α et β est fonction du vecteur $\vec{r}$ et de t, de tel sorte que :

$$|\psi(\vec{r}, t)\rangle = \alpha(\vec{r}, t)|a\rangle + \beta(\vec{r}, t)|b\rangle$$

Ce que nous avons ci-dessus est une fonction probabiliste complexe à valeur vectorielle, dont les fonctions probabilistes complexes sont $\alpha(\vec{r}, t)$ et $\beta(\vec{r}, t)$.

Nous avons avec le laplacien :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)|\psi(\vec{r}, t)\rangle = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}[\alpha(\vec{r}, t)|a\rangle + \beta(\vec{r}, t)|b\rangle]$$

Cela nous permet d'obtenir une équation relativiste la fonction d'onde de Schrödinger en y intégrant l'information quantique.
De plus, la probabilité sera toujours positive. En effet, le calcul de la probabilité d'un état s'effectuant en faisant la norme au carré des fonctions probabilistes complexes à valeurs vectorielles, celle-ci sera toujours positive, ce que nous pouvons écrire de la manière suivante :

$$0 < |\alpha(\vec{r},t)|^2 < 1$$
$$0 < |\beta(\vec{r},t)|^2 < 1$$

De telle sorte que la propriété suivante se vérifie :

$$\| |\psi(\vec{r},t)\rangle \|^2 = |\alpha(\vec{r},t)|^2 + |\beta(\vec{r},t)|^2 = 1$$

Il est important de préciser que la fonction suivante ne permet de définir que le mouvement de particules sans spin. Toutefois, la formulation que nous venons de faire précédemment permet d'associer le mouvement des particules à l'information quantique.

Part 2 – Tenseur énergie impulsion quantique.

Part A – Approximation linéaire du tenseur énergie impulsion.

Une première formulation des équations d'Einstein est la suivante [5] :

$$R^{ij} = \frac{16\pi G}{c^4}\left[\Gamma^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}\Gamma\right]$$

Avec R^{ij} le tenseur de Ricci et Γ^{ij} le tenseur énergie impulsion.
Le tenseur métrique dans le cadre d'un champ de gravité s'écrit par les égalités suivantes [4] :

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$$
$$g^{ij} = \eta^{ij} - h^{ij}$$

Lorsque $|h_{ij}| \ll 1$, on peut obtenir une approximation linéaire des equations d'Einstein, donné par la formulation suivante [5] :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)h^{ij} = \frac{16\pi G}{c^4}\left[\Gamma^{ij} - \frac{1}{2}\eta^{ij}\Gamma\right]$$

Avec $\Delta = \nabla^2$:

$$g_{ij} = \eta_{ij} + \frac{2GM}{c^2 r}diag(1,1,1,1)$$

$$g^{ij} = \eta^{ij} - \frac{2GM}{c^2 r}diag(1,1,1,1)$$

On peut alors obtenir, en considérant que $h = \eta^{ij}h_{ij}$, l'égalité suivante [6] :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)h(\vec{r},t) = -\frac{8\pi G}{c^4}\Gamma(\vec{r},t)$$

Petite remarque : Le signé négatif présent dans le membre de droite de l'équation ne veut pas dire qu'il existe une énergie négative. En fait, le tenseur représente l'attraction alors que le scalaire représente la répulsion. Il s'agit juste d'une distinction entre la forme tensoriel et scalaire de l'équation.
Pour rappel, l'équation de la gravitation Newtonienne, dans son écriture scalaire, est la suivante :

$$F = -G\frac{mM}{r^2}$$

Toutefois, afin que le lecteur ne se sentent pas perturbé par se signe moins, nous l'enlèveront et nous considéreront que la notation scalaire et la notation tensorielle représente le même concept, une attraction. Nous allons donc réécrire l'équation du tenseur énergie impulsion dans son formalisme linéaire de la manière suivante :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)h(\vec{r},t) = \frac{8\pi G}{c^4}\Gamma(\vec{r},t)$$

Nous conserverons cette forme pour les parties suivantes que nous allons traiter.

Part B – Tenseur énergie impulsion quantique à partir de l'équation de Klein-Gordon.

Part B.1 – Equivalence entre la déviation faible de la métrique de Minkowski et la fonction d'onde quantique.

A partir des équations écrites ci-dessus, nous pouvons définir une équivalence entre la courbure « scalaire » donné par le laplacien de $h(r,t)$ et aussi la version relativiste de l'équation de Schrödinger développé par Klein Gordon.

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)h(\vec{r},t) = \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\vec{r},t)$$

Ou, par simplification, nous obtenons :

$$h(\vec{r},t) = \psi(\vec{r},t)$$

Pour que cette égalité puisse subsister, il faut considérer que l'approximation des champs faibles des équations d'Einstein donné par la perturbation $h(\vec{r},t)$ (dont h^{ij} est la déviation faible de η_{ij}) est équivalent à la fonction complexe $\psi(\vec{r},t)$ définissant l'état quantique d'un système avec une amplitude de probabilité.

Un moyen efficace d'établir ce principe d'équivalence peut être expliqué par ce que l'on appelle la mesure faible. Celle-ci consiste en une technique qui permet de mesurer la valeur moyenne d'une observable (ou autrement dit, une grandeur physique telle que la position ou l'énergie) d'un système quantique en ne perturbant celui-ci que de manière négligeable. Ainsi, on retrouverait cette équivalence entre une perturbation faible (approximation des champs faibles) de l'équation d'Einstein et les faibles perturbations intervenant lors de la mesure d'un système quantique.

Il faut aussi savoir que la fonction d'onde permet de décrire le mouvement d'une onde, de la même manière que l'approximation newtonienne de l'équation d'Einstein permet de calculer le mouvement des ondes gravitationnelles. On considère ses ondes gravitationnelles comme des perturbations de l'espace-temps, celui-ci étant globalement plat, sauf que l'on considère ses perturbations comme étant faible. Cela signifie que le mouvement d'une gravitationnelle et assimilable à celle d'une particule se comportant en tant qu'onde relativiste.

Part B.2 – Tenseur énergie impulsion quantique.

A partir de l'équivalence définit ci-dessus, nous pouvons définir l'égalité suivante :

$$\frac{8\pi G}{c^4}\Gamma(\vec{r},t) = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r},t)$$

En isolant la pression, nous obtenons :

$$\Gamma(\vec{r},t) = \frac{m^2c^6}{8\pi G\hbar^2}\psi(\vec{r},t)$$

On remarque alors que nous retrouvons la constante K de l'équation d'Einstein : $G_{ij} = K \cdot T_{ij}$. Nous pouvons alors écrire la formulation suivante :

$$\Gamma(\vec{r},t) = K^{-1}\frac{c^2m^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r},t)$$

Si nous calculions et mesurions la fonction d'onde, nous constaterions que cette pression est non locale, avec des probabilités de présence plus ou moins élevé selon l'étendue de surface que nous choisissons.

Toutefois, je tiens à préciser une chose importante : Cette équation ne peut être valide pour décrire qu'une seule particule. Toutefois, en théorie quantique des champs, elle peut être utiliser pour décrire un ensemble de particule de spin nul.

Imaginons que nous calculons la pression $\Gamma(\vec{r},t)$ d'un électron. En considérant que :

$$\hbar \approx 1{,}054\,571\ \times 10^{-34}\,J.s$$
$$c \approx 299\,792\,458\ m.s^{-1}$$
$$K^{-1} = \frac{c^4}{8\pi G} \approx 4{,}815\,612\ \times 10^{42}\ N$$
$$m_{électron} \approx 9{,}109\,382 \times 10^{-31}\ kg$$

Nous avons :

$$\Gamma_{électron}(\vec{r},t) \approx 3{,}229\,379 \times 10^{67}\psi(\vec{r},t)$$

Cela veut dire que la pression d'un électron (sans calculer la fonction d'onde) est de l'ordre de 10^{67} !

Part 3 – Petite conclusion.

Dans la partie 1, nous avons vu que l'équation de Klein-Gordon est une version relativiste de l'équation de Schrödinger pour des particules sans spin. Cette équation, de second ordre, pose certains problèmes, dont un très important : la densité de probabilité peut être négative.
Nous avons trouvé une solution simple qui consistait à considérer la fonction psi comme une fonction probabiliste complexe à valeur vectorielle, que nous avions reformé dans le cadre des équations de la théorie de l'information quantique. Ainsi, en calculant la probabilité, nous sommes contraints de normer et d'élever au carré l'amplitude de probabilité, résolvant ainsi le problème de la négativité possible de la densité de probabilité.

Dans la partie 2, nous avons vu la formulation de l'approximation linéaire (ou approximation des champs faibles) de l'équation d'Einstein, dans lequel l'équation se rapproche davantage de la dynamique newtonienne.
Nous avions trouvé ensuite une équivalence entre la fonction d'onde de la physique quantique et la déviation faible définit préalablement en calculant l'approximation linéaire de l'équation d'Einstein. Cette équivalence suggère que, dans certains cas, la description d'une onde gravitationnelle réduit à un espace-temps plat (ou dans lequel la courbure de l'espace-temps n'est pas importante) est équivalente aux mouvements d'une particule qui se comporterait comme une onde relativiste.

A partir de cette équivalence, nous avons décrit une équation importante : Le tenseur énergie impulsion quantique. On découvre alors que celui-ci est non local puisqu'il dépend de la fonction d'onde. Le tenseur devient ainsi non local.
Lorsque l'on calcul la pression pour une particule (un électron), on remarque que celui-ci est très élevé, de l'ordre de dix puissance 67. Est-ce une erreur mathématique ? Ou connaissons-nous pas suffisamment le monde subatomique ?

A ces questions, j'essaierai d'y répondre en finissant l'article, lorsque j'aurai calculé à partir de la nouvelle équivalence physique l'entropie. J'essayerai ensuite de retrouver la formule d'Erik Verlinde liant l'entropie à la gravitation newtonienne.

Part 4 – Bibliographie.

[1] J.F. Fortin, P.O. Genest, J.F. Laprise, S. Marchand, V. Bérubé et S. Bégin (2003), *Les outils de base de la physique des particules*, Luc Marleau, université LAVAL

[2] Science.ch (2017) *Physique Quantique Relativiste,* Atomistique, 2. Equation de Klein-Gordon généralisée

[3] Jean Louis Basdevant, Jean Dalibard (2002), *Mécanique quantique. Cours de l'école polytechnique*, page 36, 37

[4] Y. Leroyer, G. Sénizergues (2014-2015), *Introduction à l'information quantique*, ENSEIRB-MATMECA, page 8

[5] Eric Gourgoulhon (2013-2014), *Relativité Générale*, Observatoire de Paris, Master Astronomie Astrophysique et Ingénierie Spatiale année M2 parcours de recherche, Ondes gravitationnelles page 138 à 145

[6] Yurij V. Baryshev (2017), *Fondation of relativistic astrophysics : Curvature of Riemannian Space versus Relativistic Quantum Field in Minkowski Space*, Arxiv 1702.02020v1, page 17, 18, 28-30