

# Metoda wyprowadzania liczących dynamik w Szczególnej Teorii Względności

Roman Szostek

*Politechnika Rzeszowska, Katedra Metod Ilościowych, Rzeszów, Polska  
rszostek@prz.edu.pl*

## Streszczenie:

W artykule pokazałem swoją nowatorską metodę wyprowadzania dynamik w Szczególnej Teorii Względności. Metoda ta pozwala na wyprowadzenie w mechanice relatywistycznej nieskończenie wielu dynamik. Pokazałem pięć przykładów takich wyprowadzeń. Wykazałem w ten sposób, że dynamika znana dzisiaj jako dynamika Szczególnej Teorii Względności jest tylko jedną z nieskończenie wielu możliwych. Nie ma także żadnej podstawy, aby tą obowiązującą dynamikę relatywistyczną traktować jako wyjątkową, ani z powodów eksperymentalnych, ani z powodów teoretycznych. W związku z tym rozstrzygnięcie, która z możliwych dynamik mechaniki relatywistycznej jest prawidłowym modelem rzeczywistości pozostaje otwartym problemem fizyki.

## 1. Wprowadzenie

Kinematyka zajmuje się ruchem ciał bez uwzględniania ich cech fizycznych. Podstawowe pojęcia kinematyki to: czas, położenie, transformacja, prędkość i przyspieszenie.

Dynamika zajmuje się ruchem ciał materialnych pod działaniem sił. Podstawowe pojęcia dynamiki to: masa bezwładności, siła, pęd i energia kinetyczna.

Kinematyka i dynamika składają się na mechanikę. W artykule zajmuję się mechaniką relatywistyczną, czyli Szczególną Teorią Względności, która w odróżnieniu do mechaniki klasycznej dotyczy także dużych prędkości.

Obecnie znana jest tylko jedna dynamika Szczególnej Teorii Względności. W artykule przedstawiłem autorską metodę wyprowadzania liczących dynamik dla tej teorii. Dynamikę relatywistyczną wyprowadza się na podstawie kinematyki relatywistycznej oraz jednego dodatkowego założenia, które pozwala wprowadzić do teorii pojęcia: masy, pędu oraz energii kinetycznej.

## 2. Założenia kinematyki Szczególnej Teorii Względności

Kinematyka Szczególnej Teorii Względności oparta jest na następujących założeniach:

### I. **Wszystkie układy inercjalne są równoważne.**

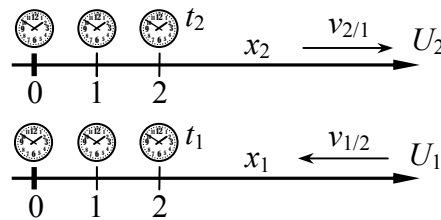
Założenie to oznacza, że nie ma takiego zjawiska fizycznego, które wyróżnia jakiś układ inercjalny. W szczególnym przypadku oznacza ono, że nie ma takiego zjawiska, do którego wyjaśnienia potrzebne jest pojęcie bezwzględnego spoczynku. Matematycznie z założenia tego wynika, że transformacja czasu i współrzędnych położenia pomiędzy dowolnymi dwoma układami inercjalnymi ma identyczną postać, zależną jedynie od względnej prędkości tych inercjalnych układów.

- II. **Prędkość światła  $c$  w próżni jest taka sama w każdym kierunku oraz w każdym układzie inercyjnym.**  
 III. **Transformacja czasu i współrzędnych położenia pomiędzy układami inercyjnymi jest liniowa.**

Często założenia te są zapisywane w innych równoważnych postaciach.

Na podstawie wymienionych założeń można wyprowadzić transformację Lorentza, na której opiera się Szczególna Teoria Względności. Istnieje wiele różnych wyprowadzeń tej transformacji. Dwa wyprowadzenia zostały przedstawione w monografii [3].

Dla naszych potrzeb wygodne będą oznaczenia przyjęte na rysunku 1. Układy inercjalne poruszają się wzdłuż swoich osi  $x$ . Prędkość  $v_{2/1}$  jest prędkością układu  $U_2$  mierzona przez obserwatora z układu  $U_1$ . Prędkość  $v_{1/2}$  jest prędkością układu  $U_1$  mierzona przez obserwatora z układu  $U_2$ . W Szczególnej Teorii Względności zachodzi, że  $v_{2/1} = -v_{1/2}$ .



Rys. 1. Względny ruch układów inercyjnych  $U_1$  oraz  $U_2$  ( $v_{2/1} = -v_{1/2}$ ).

Transformacja Lorentza z układu  $U_2$  do układu  $U_1$  ma postać

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} (t_2 + \frac{v_{2/1}}{c^2} x_2) \quad (1)$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} (v_{2/1} t_2 + x_2) \quad (2)$$

$$y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2 \quad (3)$$

Transformacja Lorentza z układu  $U_1$  do układu  $U_2$  ma postać

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{1/2}/c)^2}} (t_1 + \frac{v_{1/2}}{c^2} x_1) \quad (4)$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{1/2}/c)^2}} (v_{1/2} t_1 + x_1) \quad (5)$$

$$y_2 = y_1, \quad z_2 = z_1 \quad (6)$$

Transformacja (1)-(3), a także (4)-(6), zawiera pełną informację o kinematyce relatywistycznej.

### 3. Wybrane własności kinematyki relatywistycznej

Przy wyprowadzaniu dynamik potrzebne nam będą dwa wzory z kinematyki, czyli (20) oraz (23). Wyprowadzimy je z transformacji (1)-(3).

### 3.1. Transformacja prędkości

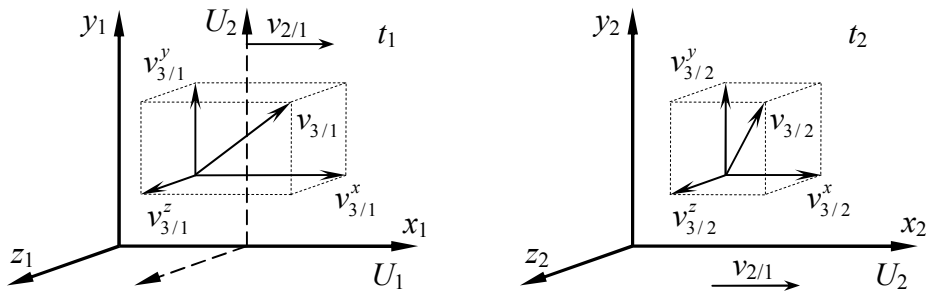
Wyznamy różniczkę z transformacji (1)-(3)

$$dt_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} (dt_2 + \frac{v_{2/1}}{c^2} dx_2) \quad (7)$$

$$dx_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} (v_{2/1} dt_2 + dx_2) \quad (8)$$

$$dy_1 = dy_2, \quad dz_1 = dz_2 \quad (9)$$

Z układu inercyjnego  $U_1$  oraz układu inercyjnego  $U_2$  obserwowane jest poruszające się ciało  $U_3$ . W układzie  $U_1$  ma ono prędkość  $v_{3/1}$ , natomiast w układzie  $U_2$  ma prędkość  $v_{3/2}$ . Składowe tych prędkości zostały przedstawione na rysunku 2.



Rys. 2. Ruch ciała widziany z dwóch układów inercyjnych  $U_1$  oraz  $U_2$ .

Prędkość ciała  $U_3$  w układzie inercyjnym  $U_2$  ma następujące składowe

$$v_{3/2}^x = \frac{dx_2}{dt_2}, \quad v_{3/2}^y = \frac{dy_2}{dt_2}, \quad v_{3/2}^z = \frac{dz_2}{dt_2} \quad (10)$$

Prędkość ciała  $U_3$  w układzie inercyjnym  $U_1$  ma następujące składowe

$$v_{3/1}^x = \frac{dx_1}{dt_1}, \quad v_{3/1}^y = \frac{dy_1}{dt_1}, \quad v_{3/1}^z = \frac{dz_1}{dt_1} \quad (11)$$

Gdy do równań (11) wstawiamy różniczkę (7)-(9) wtedy otrzymamy

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{3/1}^x = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} (v_{2/1} dt_2 + dx_2)}{\frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} (dt_2 + \frac{v_{2/1}}{c^2} dx_2)} \\ v_{3/1}^y = \frac{dy_2}{\frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} (dt_2 + \frac{v_{2/1}}{c^2} dx_2)} \\ v_{3/1}^z = \frac{dz_2}{\frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} (dt_2 + \frac{v_{2/1}}{c^2} dx_2)} \end{array} \right. \quad (12)$$

Czyli

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{3/1}^x = \frac{v_{2/1} + dx_2/dt_2}{1 + \frac{v_{2/1}}{c^2}(dx_2/dt_2)} \\ v_{3/1}^y = \sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2} \frac{dy_2/dt_2}{1 + \frac{v_{2/1}}{c^2}(dx_2/dt_2)} \\ v_{3/1}^z = \sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2} \frac{dz_2/dt_2}{1 + \frac{v_{2/1}}{c^2}(dx_2/dt_2)} \end{array} \right. \quad (13)$$

Na podstawie (10) otrzymujemy szukaną transformację prędkości z układu  $U_2$  do układu  $U_1$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{3/1}^x = \frac{v_{3/2}^x + v_{2/1}}{1 + \frac{v_{3/2}^x v_{2/1}}{c^2}} \\ v_{3/1}^y = \sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2} \frac{v_{3/2}^y}{1 + \frac{v_{3/2}^x v_{2/1}}{c^2}} \\ v_{3/1}^z = \sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2} \frac{v_{3/2}^z}{1 + \frac{v_{3/2}^x v_{2/1}}{c^2}} \end{array} \right. \quad (14)$$

W szczególnym przypadku, gdy ciało  $U_3$  porusza się równoległe do osi  $x$  zachodzi

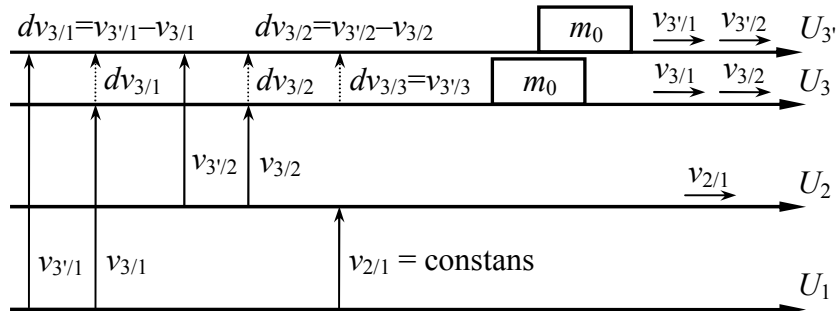
$$v_{3/1}^x = v_{3/1}, \quad v_{3/2}^x = v_{3/2}, \quad v_{3/1}^y = v_{3/2}^y = 0, \quad v_{3/1}^z = v_{3/2}^z = 0 \quad (15)$$

Wtedy transformacja prędkości (14) przyjmuje postać wzoru na sumowanie prędkości równoległych

$$v_{3/1} = \frac{v_{3/2} + v_{2/1}}{1 + \frac{v_{3/2} v_{2/1}}{c^2}} \quad (16)$$

### 3.2. Zmiana prędkości widziana z różnych układów inercjalnych

Ciało znajduje się nieruchomo w układzie  $U_3$  i wykonuje chwilowe przyspieszenie do układu  $U_3$ . Ruch tego ciała jest obserwowany z układów  $U_1$  oraz  $U_2$ . Prędkości układów inercjalnych są do siebie równoległe. Przyjmujemy oznaczenia pokazane na rysunku 3.



Rys. 3. Przyrosty prędkości widziane w układach inercjalnych  $U_1$  oraz  $U_2$ .

Wyznamy różniczki z wzoru (16)

$$dv_{3/1} = \frac{d \frac{v_{3/2} + v_{2/1}}{1 + (v_{3/2}v_{2/1})/c^2}}{dv_{3/2}} dv_{3/2} = \frac{1 + \frac{v_{3/2}v_{2/1}}{c^2} - (v_{3/2} + v_{2/1})\frac{v_{2/1}}{c^2}}{\left(1 + \frac{v_{3/2}v_{2/1}}{c^2}\right)^2} dv_{3/2} \quad (17)$$

$$dv_{3/1} = \frac{1 - \frac{v_{2/1}^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v_{3/2}v_{2/1}}{c^2}\right)^2} dv_{3/2} \quad (18)$$

Jeżeli układ  $U_3$  jest układem  $U_2$  wtedy należy indeks 3 zamienić indeksem 2. Otrzymujemy

$$dv_{3/1} = dv_{2/1}, \quad v_{3/2} = v_{2/2} = 0, \quad dv_{3/2} = dv_{2/2} \quad (19)$$

Na tej podstawie wzór (18) przyjmuje postać

$$dv_{2/2} = \frac{dv_{2/1}}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \quad (20)$$

Zależność (20) wiąże ze sobą zmianę prędkości ciała widzianą w układzie inercjalnym  $U_2$ , w którym znajduje się ciało ( $dv_{2/2}$ ), oraz zmianę prędkości widzianą z innego układu inercjalnego  $U_1$  ( $dv_{2/1}$ ).

### 3.3. Dylatacja czasu

Jeżeli w układzie  $U_2$  znajduje się nieruchomo ciało, wtedy dla jego współrzędnych zachodzi

$$\frac{dx_2}{dt_2} = 0 \quad (21)$$

Na podstawie transformacji czasu (7) otrzymujemy

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} \left(1 + \frac{v_{2/1}}{c^2} \frac{dx_2}{dt_2}\right) \xrightarrow{\frac{dx_2}{dt_2}=0} \frac{dt_1}{dt_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} \quad (22)$$

Na tej podstawie otrzymujemy wzór na dylatację czasu dla ciała nieruchomego względem układu  $U_2$

$$\frac{dx_2}{dt_2} = 0 \Rightarrow dt_2 = \sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2} \cdot dt_1 \quad (23)$$

## 4. Dynamiki w Szczególnej Teorii Względności

Wszystkie rozważania będą prowadzone tylko dla modelu jednowymiarowego, czyli wszystkie analizowane wielkości wektorowe będą równoległe do osi  $x$ . Każdą wyprowadzoną dynamikę można łatwo uogólnić na przypadku trójwymiarowe.

Aby w Szczególnej Teorii Względności wyprowadzić dynamikę konieczne jest przyjęcie dodatkowego założenia, które pozwala wprowadzić do teorii pojęcia: masy, pędu oraz energii kinetycznej. W zależności od przyjętego założenia otrzymuje się różne dynamiki ciał.

Masę bezwładności ciała spoczywającego w inercjalnym układzie odniesienia oznaczymy przez  $m_0$  (masa spoczynkowa). Masę bezwładności ciała nieruchomego w układzie  $U_2$ , widzianą

z układu  $U_1$  oznaczmy przez  $m_{2/1}$  (masa relatywistyczna). Warto zwrócić uwagę, że masa relatywistyczna jest w tym przypadku masą bezwładności występującą w II zasadzie dynamiki Newtona, a nie masą występującą we wzorze na pęd, jak przyjęto w Szczególnej Teorii Względności. W ten sposób przyjęliśmy inną definicję masy relatywistycznej niż ta, jaką przyjęto w Szczególnej Teorii Względności. Taka definicja masy relatywistycznej jest wygodniejsza przy wyprowadzaniu dynamik.

Dla siły, pędu oraz energii kinetycznej przyjmujemy definicje identyczne jak w mechanice klasycznej.

Ciało o masie bezwładności  $m_0$  znajduje się w układzie  $U_2$ . Działa na nie siła  $F_{2/2}$  powodująca przyśpieszenie  $dv_{2/2}/dt_2$ . Stąd dla obserwatora z układu  $U_2$ , II zasada dynamiki Newtona ma postać

$$F_{2/2} = m_0 \cdot a_{2/2} = m_0 \frac{dv_{2/2}}{dt_2} \quad (24)$$

Dla obserwatora z układu  $U_1$  masa bezwładności tego samego ciała wynosi  $m_{2/1}$ . Dla tego obserwatora na ciało działa siła  $F_{2/1}$  powodująca przyśpieszenie  $dv_{2/1}/dt_1$ . Stąd dla obserwatora z układu  $U_1$ , II zasada dynamiki Newtona ma postać

$$F_{2/1} = m_{2/1} \cdot a_{2/1} = m_{2/1} \frac{dv_{2/1}}{dt_1} \quad (25)$$

Dla obserwatora z układu  $U_2$  zmianę pędu tego ciała można zapisać w postaciach

$$dp_{2/2} = F_{2/2} \cdot dt_2 = m_0 \cdot a_{2/2} \cdot dt_2 = m_0 \frac{dv_{2/2}}{dt_2} dt_2 = m_0 \cdot dv_{2/2} \quad (26)$$

Dla obserwatora z układu  $U_1$  zmianę pędu tego ciała można zapisać w postaciach

$$dp_{2/1} = F_{2/1} \cdot dt_1 = m_{2/1} \cdot a_{2/1} \cdot dt_1 = m_{2/1} \frac{dv_{2/1}}{dt_1} dt_1 = m_{2/1} \cdot dv_{2/1} \quad (27)$$

gdzie:

- $dp_{2/2}$  jest zmianą pędu ciała o masie spoczynkowej  $m_0$  znajdującego się w układzie inercjalnym  $U_2$ , jaką mierzy obserwator z tego samego układu inercjalnego  $U_2$ ,
- $dp_{2/1}$  jest zmianą pędu ciała znajdującego się w układzie inercjalnym  $U_2$ , jaką mierzy obserwator z układu inercjalnego  $U_1$ .

Energia kinetyczna ciała jest równa włożonej pracy do jego przyśpieszania. Dla obserwatora z układu  $U_1$  zmiana energii kinetycznej tego ciała wynosi

$$dE_{2/1} = F_{2/1} \cdot dx_{2/1} = m_{2/1} \cdot a_{2/1} \cdot dx_{2/1} = m_{2/1} \frac{dv_{2/1}}{dt_1} dx_{2/1} = m_{2/1} \frac{dx_{2/1}}{dt_1} dv_{2/1} = m_{2/1} \cdot v_{2/1} \cdot dv_{2/1} \quad (28)$$

gdzie:

- $dE_{2/1}$  jest zmianą energii kinetycznej ciała znajdującego się w układzie inercjalnym  $U_2$ , jaką mierzy obserwator z układu inercjalnego  $U_1$ .

#### 4.1. Dynamika STW ze stałą siłą, czyli STW/F

W tym podrozdziale zostanie wyprowadzony model dynamiki ciał oparty na założeniu, że siła przyśpieszająca ciało (równoległa do osi  $x$ ) jest taka sama dla obserwatora z każdego inercjalnego układu odniesienia (stąd oznaczenie  $F$ ).

#### 4.1.1. Masa relatywistyczna w STW/F

W modelu STW/F przyjmujemy założenie, że

$$F_{2/1}^F = F_{2/2} \quad (29)$$

Po podstawieniu (24) oraz (25) otrzymamy

$$m_{2/1}^F \frac{dv_{2/1}}{dt_1} = m_0 \frac{dv_{2/2}}{dt_2} \quad (30)$$

Na podstawie (20) oraz (23) otrzymujemy

$$m_{2/1}^F \frac{dv_{2/1}}{dt_1} = m_0 \frac{dv_{2/1}}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2} \cdot dt_1} \quad (31)$$

Stąd masa relatywistyczna ciała znajdującego się w układzie  $U_2$ , widziana z układu  $U_1$ , gdy spełnione jest założenie (29), wyraża się wzorem

$$m_{2/1}^F = m_0 \left[ \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \right]^{3/2} \quad (32)$$

#### 4.1.2. Pęd w STW/F

Ciało o masie spoczynkowej  $m_0$  jest związane z układem  $U_2$ . Aby wyznaczyć pęd tego ciała względem układu  $U_1$  podstawiamy (32) do (27)

$$dp_{2/1}^F = m_{2/1}^F \cdot dv_{2/1} = m_0 \left[ \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \right]^{3/2} dv_{2/1} = m_0 c^3 \frac{1}{(c^2 - v_{2/1}^2)^{3/2}} dv_{2/1} \quad (33)$$

Pęd ciała jest sumą przyrostów jego pędu, gdy ciało jest przyśpieszane z układu inercjalnego  $U_1$  (ciało ma prędkość 0) do układu inercjalnego  $U_2$  (ciało ma prędkość  $v_{2/1}$ ), czyli

$$p_{2/1}^F = m_0 c^3 \int_0^{v_{2/1}} \frac{1}{(c^2 - v_{2/1}^2)^{3/2}} dv_{2/1} \quad (34)$$

Z pracy [1] (wzór 72, s. 167) można odczytać, że

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad a \neq 0 \quad (35)$$

Po zastosowaniu całki (35) do (34) otrzymujemy wzór na pęd ciała znajdującego się w układzie  $U_2$  i mierzony przez obserwatora z układu  $U_1$  w postaci

$$p_{2/1}^F = m_0 c^3 \frac{v_{2/1}}{c^2 \sqrt{c^2 - v_{2/1}^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} v_{2/1} \quad (36)$$

Wzór ten jest identyczny jak wzór na pęd znany ze Szczególnej Teorii Względności. Jest tak dlatego, że dynamika znana ze Szczególnej Teorii Względności jest wyprowadzona właśnie przy założeniu (29). Zostało ono przyjęte nieświadomie, gdyż uważano, że jest ono konieczne. Świadomość tego założenia pozwala na jego zmianę i wyprowadzenie innych dynamik.

Jak już zostało wspomniane wcześniej, przyjęta przez nas definicja masy relatywistycznej jest inna niż definicja przyjęta w Szczególnej Teorii Względności. W naszym przypadku masa relatywistyczna jest tą, która występuje w II zasadzie dynamiki Newtona (25). W tym konkretnym

przypadku wyraża się ona zależnością (32). W Szczególnej Teorii Względności masa relatywistyczna jest tą, która występuje we wzorze (36) na pęd.

#### 4.1.3. Pęd w STW/F dla małych prędkości

Dla małej prędkości  $v_{2/1} \ll c$  pęd (36) sprowadza się do pędu z mechaniki klasycznej, gdyż

$$v_{2/1} \ll c \Rightarrow p_{2/1}^F \approx m_0 v_{2/1} \quad (37)$$

#### 4.1.4. Energia kinetyczna w STW/F

Wyznamy wzór na energię kinetyczną. Do wzoru (28) podstawiamy zależność na masę relatywistyczną podaną w (32)

$$dE_{2/1}^F = m_{2/1}^F \cdot v_{2/1} \cdot dv_{2/1} = m_0 \left[ \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \right]^{3/2} v_{2/1} dv_{2/1} = m_0 c^3 \frac{v_{2/1}}{(c^2 - v_{2/1}^2)^{3/2}} dv_{2/1} \quad (38)$$

Energia kinetyczna ciała jest sumą przyrostów jego energii kinetycznej, gdy ciało jest przyspieszane z układu inercjalnego  $U_1$  (ciało ma prędkość 0) do układu inercjalnego  $U_2$  (ciało ma prędkość  $v_{2/1}$ ), czyli

$$E_{2/1}^F = m_0 c^3 \int_0^{v_{2/1}} \frac{v_{2/1}}{(c^2 - v_{2/1}^2)^{3/2}} dv_{2/1} \quad (39)$$

Z pracy [1] (wzór 74, s. 167) można odczytać, że

$$\int \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (40)$$

Po zastosowaniu całki (40) do (39) otrzymujemy wzór na energię kinetyczną ciała znajdującego się w układzie  $U_2$  i mierzoną przez obserwatora z układu  $U_1$  w postaci

$$E_{2/1}^F = m_0 c^3 \frac{1}{\sqrt{c^2 - x^2}} \Big|_0^{v_{2/1}} = m_0 c^3 \left( \frac{1}{\sqrt{c^2 - v_{2/1}^2}} - \frac{1}{c} \right) = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} - m_0 c^2 \quad (41)$$

Wzór ten jest identyczny jak wzór na energię kinetyczną znana ze Szczególnej Teorii Względności, z takich samych powodów jak w przypadku pędu (36).

#### 4.1.5. Energia kinetyczna w STW/F dla małych prędkości

Zależności (41) można zapisać również w postaci

$$E_{2/1}^F = m_0 c^2 \frac{1 - \sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}}{1 + \sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} \quad (42)$$

$$E_{2/1}^F = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \frac{2}{1 - \frac{v_{2/1}^2}{c^2} + \sqrt{1 - \frac{v_{2/1}^2}{c^2}}} \quad (43)$$

Na tej podstawie dla małych wartości  $v_{2/1} \ll c$  otrzymujemy



$$v_{2/1} \ll c \Rightarrow E_{2/1}^F \approx \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \frac{2}{1+1} = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \quad (44)$$

#### 4.1.6. Siła w STW/F

Ze względu na założenie (29) pomiar wartości tej samej siły przez dwóch różnych obserwatorów jest identyczny.

### 4.2. Dynamika STW ze stałą zmianą pędu, czyli STW/ $\Delta p$

W tym podrozdziale zostanie wyprowadzony model dynamiki ciał oparty na założeniu, że zmiana pędu ciała (równoległa do osi  $x$ ) jest taka sama dla obserwatora z każdego inercyjnego układu odniesienia (stąd oznaczenie  $\Delta p$ ).

Ta dynamika wydaje się szczególnie interesująca, ponieważ prawo zachowania pędu jest prawem fundamentalnym. Założenie, że zmiana pędu ciała jest taka sama dla każdego obserwatora wydaje się być naturalnym rozszerzeniem tego prawa.

#### 4.2.1. Masa relatywistyczna w STW/ $\Delta p$

W modelu STW/ $\Delta p$  zakładamy, że

$$dp_{2/1}^{\Delta p} = dp_{2/2} \quad (45)$$

Po podstawieniu (26) oraz (27) otrzymamy

$$m_{2/1}^{\Delta p} dv_{2/1} = m_0 dv_{2/2} \quad (46)$$

Na podstawie (20) otrzymujemy

$$m_{2/1}^{\Delta p} dv_{2/1} = m_0 \frac{dv_{2/1}}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \quad (47)$$

Stąd masa relatywistyczna ciała znajdującego się w układzie  $U_2$ , widziana z układu  $U_1$ , gdy spełnione jest założenie (45), wyraża się wzorem

$$m_{2/1}^{\Delta p} = m_0 \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \quad (48)$$

#### 4.2.2. Pęd w STW/ $\Delta p$

Ciało o masie spoczynkowej  $m_0$  jest związane z układem  $U_2$ . Aby wyznaczyć pęd tego ciała względem układu  $U_1$  podstawiamy (48) do (27)

$$dp_{2/1}^{\Delta p} = m_{2/1}^{\Delta p} \cdot dv_{2/1} = m_0 \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} dv_{2/1} = m_0 c^2 \frac{1}{c^2 - v_{2/1}^2} dv_{2/1} \quad (49)$$

Pęd ciała jest sumą przyrostów jego pędu, gdy ciało jest przyśpieszane z układu inercyjnego  $U_1$  (ciało ma prędkość 0) do układu inercyjnego  $U_2$  (ciało ma prędkość  $v_{2/1}$ ), czyli

$$p_{2/1}^{\Delta p} = m_0 c^2 \int_0^{v_{2/1}} \frac{1}{c^2 - v_{2/1}^2} dv_{2/1} \quad (50)$$

Z pracy [1] (wzór 52, s. 160) można odczytać, że

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|, \quad a \neq 0 \quad (51)$$

Po zastosowaniu całki (51) do (50) otrzymujemy wzór na pęd ciała znajdującego się w układzie  $U_2$  i mierzony przez obserwatora z układu  $U_1$  w postaci

$$p_{2/1}^{\Delta p} = m_0 c^2 \frac{1}{2c} \ln \left| \frac{c+x}{c-x} \right|_0^{v_{2/1}} = \frac{m_0 c}{2} \ln \left( \frac{c+v_{2/1}}{c-v_{2/1}} \right) \quad (52)$$

#### 4.2.3. Pęd w STW/ $\Delta p$ dla małych prędkości

Zależności (52) można zapisać również w postaci

$$p_{2/1}^{\Delta p} = \frac{m_0 v_{2/1}}{2} \frac{c}{v_{2/1}} \ln \left( \frac{c+v_{2/1}}{c-v_{2/1}} \right) = \frac{m_0 v_{2/1}}{2} \ln \left( \frac{(1+v_{2/1}/c)^{c/v_{2/1}}}{(1-v_{2/1}/c)^{c/v_{2/1}}} \right) \quad (53)$$

$$p_{2/1}^{\Delta p} = \frac{m_0 v_{2/1}}{2} \ln \left( \frac{\left(1 + \frac{1}{c/v_{2/1}}\right)^{c/v_{2/1}}}{\left(1 - \frac{1}{c/v_{2/1}}\right)^{c/v_{2/1}}} \right) \quad (54)$$

Na tej podstawie dla małych wartości  $v_{2/1} \ll c$  otrzymujemy

$$v_{2/1} \ll c \Rightarrow p_{2/1}^{\Delta p} \approx \frac{m_0 v_{2/1}}{2} \ln \left( \frac{e}{1/e} \right) = \frac{m_0 v_{2/1}}{2} \ln(e^2) = m_0 v_{2/1} \quad (55)$$

#### 4.2.4. Energia kinetyczna w STW/ $\Delta p$

Wyznamy wzór na energię kinetyczną. Do wzoru (28) podstawiamy zależność na masę relatywistyczną podaną w (48)

$$dE_{2/1}^{\Delta p} = m_{2/1}^{\Delta p} \cdot v_{2/1} \cdot dv_{2/1} = m_0 \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} v_{2/1} dv_{2/1} = m_0 c^2 \frac{v_{2/1}}{c^2 - v_{2/1}^2} dv_{2/1} \quad (56)$$

Energia kinetyczna ciała jest sumą przyrostów jego energii kinetycznej, gdy ciało jest przyspieszane z układu inercjalnego  $U_1$  (ciało ma prędkość 0) do układu inercjalnego  $U_2$  (ciało ma prędkość  $v_{2/1}$ ), czyli

$$E_{2/1}^{\Delta p} = m_0 c^2 \int_0^{v_{2/1}} \frac{v_{2/1}}{c^2 - v_{2/1}^2} dv_{2/1} \quad (57)$$

Z pracy [1] (wzór 56, s. 160) można odczytać, że

$$\int \frac{x}{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln |a^2 - x^2| \quad (58)$$

Po zastosowaniu całki (58) do (57) otrzymujemy wzór na energię kinetyczną ciała znajdującego się w układzie  $U_2$  i mierzoną przez obserwatora z układu  $U_1$  w postaci

$$E_{2/1}^{\Delta p} = -m_0 c^2 \frac{1}{2} \ln |c^2 - x^2|_0^{v_{2/1}} = -\frac{m_0 c^2}{2} \ln(c^2 - v_{2/1}^2) + \frac{m_0 c^2}{2} \ln(c^2) \quad (59)$$

$$E_{2/1}^{\Delta p} = \frac{m_0 c^2}{2} \ln \frac{c^2}{c^2 - v_{2/1}^2} = \frac{m_0 c^2}{2} \ln \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \quad (60)$$

#### 4.2.5. Energia kinetyczna w STW/ $\Delta p$ dla małych prędkości

Zależności (60) można zapisać również w postaci

$$E_{2/1}^{\Delta p} = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \frac{c^2}{v_{2/1}^2} \ln \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \ln \frac{1}{[1 - (v_{2/1}/c)^2]^{(c/v_{2/1})^2}} \quad (61)$$

$$E_{2/1}^{\Delta p} = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \ln \frac{1}{\left[1 - \frac{1}{(c/v_{2/1})^2}\right]^{(c/v_{2/1})^2}} \quad (62)$$

Na tej podstawie dla małych wartości  $v_{2/1} \ll c$  otrzymujemy

$$v_{2/1} \ll c \Rightarrow E_{2/1}^{\Delta p} \approx \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \ln \frac{1}{1/e} = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \quad (63)$$

#### 4.2.6. Siła w STW/ $\Delta p$

Ciało o masie spoczynkowej  $m_0$  jest związane z układem  $U_2$ . Działa na nie siła powodująca przyspieszenie. Dla obserwatora z tego układu siła przyspieszająca ma zgodnie z (24) wartość

$$F_{2/2} = m_0 \frac{dv_{2/2}}{dt_2} \quad (64)$$

Dla obserwatora z układu  $U_1$  siła przyspieszająca ma zgodnie z (25) wartość

$$F_{2/1}^{\Delta p} = m_{2/1}^{\Delta p} \frac{dv_{2/1}}{dt_1} \quad (65)$$

Jeżeli podzielimy stronami równanie (65) przez (64), to na podstawie (20) i (23) otrzymamy

$$\frac{F_{2/1}^{\Delta p}}{F_{2/2}} = \frac{m_{2/1}^{\Delta p}}{m_0} \cdot \frac{dt_2}{dt_1} \cdot \frac{dv_{2/1}}{dv_{2/2}} = \frac{m_{2/1}^{\Delta p}}{m_0} (1 - (v_{2/1}/c)^2)^{3/2} \quad (66)$$

Na podstawie (48) uzyskamy związek pomiędzy pomiarami tej samej siły przez dwóch różnych obserwatorów

$$F_{2/1}^{\Delta p} = \sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2} \cdot F_{2/2} \quad (67)$$

Największą wartość siły mierzy obserwator z układu inercjalnego, w którym znajduje się ciało.

### 4.3. Dynamika STW ze stałą masą, czyli STW/ $m$

W tym podrozdziale zostanie wyprowadzony model dynamiki ciał oparty na założeniu, że masa ciała jest taka sama dla obserwatora z każdego inercjalnego układu odniesienia (stąd oznaczenie  $m$ ).

#### 4.3.1. Masa relatywistyczna w STW/ $m$

W modelu STW/ $m$  zakładamy, że

$$m_{2/1}^m = m_0 \quad (68)$$

Z tego względu dla obserwatora z układu inercjalnego  $U_1$  masa ciała znajdującego się w układzie  $U_2$ , jest taka sama jak masa spoczynkowa.

#### 4.3.2. Pęd w STW/ $m$

Ciało o masie spoczynkowej  $m_0$  jest związane z układem  $U_2$ . Aby wyznaczyć pęd tego ciała względem układu  $U_1$  podstawiamy (68) do (27)

$$dp_{2/1}^m = m_{2/1}^m \cdot dv_{2/1} = m_0 dv_{2/1} \quad (69)$$

Pęd ciała jest sumą przyrostów jego pędu, gdy ciało jest przyspieszane z układu inercjalnego  $U_1$  (ciało ma prędkość 0) do układu inercjalnego  $U_2$  (ciało ma prędkość  $v_{2/1}$ ), czyli

$$p_{2/1}^m = m_0 \int_0^{v_{2/1}} dv_{2/1} = m_0 v_{2/1} \quad (70)$$

W tej dynamice relatywistycznej pęd wyraża się takim samym wzorem jak w mechanice klasycznej.

#### 4.3.3. Energia kinetyczna w STW/ $m$

Wyznamy wzór na energię kinetyczną. Do wzoru (28) podstawiamy zależność na masę relatywistyczną podaną w (68)

$$dE_{2/1}^m = m_{2/1}^m \cdot v_{2/1} \cdot dv_{2/1} = m_0 v_{2/1} dv_{2/1} \quad (71)$$

Energia kinetyczna ciała jest sumą przyrostów jego energii kinetycznej, gdy ciało jest przyspieszane z układu inercjalnego  $U_1$  (ciało ma prędkość 0) do układu inercjalnego  $U_2$  (ciało ma prędkość  $v_{2/1}$ ), czyli

$$E_{2/1}^m = m_0 \int_0^{v_{2/1}} v_{2/1} dv_{2/1} = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \quad (72)$$

W tej dynamice relatywistycznej energia kinetyczna wyraża się takim samym wzorem jak w mechanice klasycznej.

#### 4.3.4. Siła w STW/ $m$

Ciało o masie spoczynkowej  $m_0$  jest związane z układem  $U_2$ . Działa na nie siła powodująca przyspieszenie. Dla obserwatora z tego układu siła przyspieszająca ma zgodnie z (24) wartość

$$F_{2/2} = m_0 \frac{dv_{2/2}}{dt_2} \quad (73)$$

Dla obserwatora z układu  $U_1$  siła przyspieszająca ma zgodnie z (25) wartość

$$F_{2/1}^m = m_{2/1}^m \frac{dv_{2/1}}{dt_1} = m_0 \frac{dv_{2/1}}{dt_1} \quad (74)$$

Jeżeli podzielimy stronami równanie (74) przez (73), to na podstawie (20) i (23) otrzymamy

$$\frac{F_{2/1}^m}{F_{2/2}} = \frac{dt_2}{dt_1} \cdot \frac{dv_{2/1}}{dv_{2/2}} = (1 - (v_{2/1}/c)^2)^{3/2} \quad (75)$$

Czyli

$$F_{2/1}^m = (1 - (v_{2/1}/c)^2)^{3/2} \cdot F_{2/2} \quad (76)$$

Największą wartość siły mierzy obserwator z układu inercjalnego, w którym znajduje się ciało.

#### 4.3.5. Dyskusja na temat dynamiki STW/m

Uzyskanie dynamiki relatywistycznej, w której nie występuje masa relatywistyczna oraz wzory na pęd i energię kinetyczną są identyczne jak w mechanice klasycznej może być zaskakujące, ponieważ w mechanice relatywistycznej uważa się, że rozpędzane ciało może uzyskać maksymalnie prędkość  $c$ . Jednak ta dynamika jest formalnie poprawna.

Jeżeli prędkość  $v_{2/1}$  ciała zbliża się do wartości  $c$ , wtedy zgodnie z (76)

$$F_{2/1}^m = (1 - 1)^{3/2} \cdot F_{2/2} \approx 0 \quad (77)$$

W układzie inercjalnym  $U_2$ , w którym znajduje się ciało, może na nie działać siła przyspieszająca  $F_{2/2}$  o dowolnej, ale skończonej wartości. Jednak z perspektywy układu inercjalnego  $U_1$ , względem którego ciało ma prędkość  $c$ , ta sama siła ma wartość zerową. Oznacza to, że z perspektywy układu  $U_1$  nie jest możliwe wykonanie nad ciałem pracy, która będzie zwiększała jego energię kinetyczną w nieskończoność. Z zależności (72) wynika, że energia kinetyczna jaką posiada ciało o masie  $m_0$  i prędkości  $c$  ma wartość

$$E_{\max}^m = \frac{m_0 c^2}{2} \quad (78)$$

#### 4.4. Dynamika STW ze stałą siłą na czas jej działania, czyli STW/F/Δt

W tym podrozdziale zostanie wyprowadzony model dynamiki ciał oparty na założeniu, że siła przyspieszająca ciało (równoległa do osi  $x$ ) podzielona przez czas jej działania jest taka sama dla obserwatora z każdego inercjalnego układu odniesienia (stąd oznaczenie  $F/\Delta t$ ).

##### 4.4.1. Masa relatywistyczna w STW/F/Δt

W modelu STW/F/Δt przyjmujemy założenie, że

$$\frac{F_{2/1}^{F/\Delta t}}{dt_1} = \frac{F_{2/2}}{dt_2} \quad (79)$$

Po podstawieniu (24) oraz (25) otrzymamy

$$m_{2/1}^{F/\Delta t} \frac{dv_{2/1}}{dt_1} \frac{1}{dt_1} = m_0 \frac{dv_{2/2}}{dt_2} \frac{1}{dt_2} \quad (80)$$

Na podstawie (20) oraz (23) otrzymujemy

$$m_{2/1}^{F/\Delta t} \frac{dv_{2/1}}{dt_1^2} = m_0 \frac{\frac{dv_{2/1}}{1 - (v_{2/1}/c)^2}}{(1 - (v_{2/1}/c)^2) dt_1^2} \quad (81)$$

Stąd masa relatywistyczna ciała znajdującego się w układzie  $U_2$ , widziana z układu  $U_1$ , gdy spełnione jest założenie (79), wyraża się wzorem

$$m_{2/1}^{F/\Delta t} = m_0 \left[ \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \right]^2 \quad (82)$$

#### 4.4.2. Pęd w STW/F/Δt

Ciało o masie spoczynkowej  $m_0$  jest związane z układem  $U_2$ . Aby wyznaczyć pęd tego ciała względem układu  $U_1$  podstawiamy (82) do (27)

$$dp_{2/1}^{F/\Delta t} = m_{2/1}^{F/\Delta t} \cdot dv_{2/1} = m_0 \left[ \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \right]^2 dv_{2/1} = m_0 c^4 \frac{1}{(c^2 - v_{2/1}^2)^2} dv_{2/1} \quad (83)$$

Pęd ciała jest sumą przyrostów jego pędu, gdy ciało jest przyspieszane z układu inercjalnego  $U_1$  (ciało ma prędkość 0) do układu inercjalnego  $U_2$  (ciało ma prędkość  $v_{2/1}$ ), czyli

$$p_{2/1}^{F/\Delta t} = m_0 c^4 \int_0^{v_{2/1}} \frac{1}{(c^2 - v_{2/1}^2)^2} dv_{2/1} \quad (84)$$

Z pracy [1] (wzór 54, s. 160) można odczytać, że

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{4a^3} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|, \quad a \neq 0 \quad (85)$$

Po zastosowaniu całki (85) do (84) otrzymujemy wzór na pęd ciała znajdującego się w układzie  $U_2$  i mierzony przez obserwatora z układu  $U_1$  w postaci

$$p_{2/1}^{F/\Delta t} = m_0 c^4 \left[ \frac{x}{2c^2(c^2 - x^2)} + \frac{1}{4c^3} \ln \frac{(c+x)}{(c-x)} \right] \Bigg|_0^{v_{2/1}} = m_0 c \left[ \frac{cv_{2/1}}{2(c^2 - v_{2/1}^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{(c+v_{2/1})}{(c-v_{2/1})} \right] \quad (86)$$

$$p_{2/1}^{F/\Delta t} = m_0 v_{2/1} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} + \ln \left( \frac{c+v_{2/1}}{c-v_{2/1}} \right)^{\frac{c}{2v_{2/1}}} \right] \quad (87)$$

#### 4.4.3. Pęd w STW/F/Δt dla małych prędkości

Zależności (87) można zapisać również w postaci

$$p_{2/1}^{F/\Delta t} = m_0 v_{2/1} \left[ \frac{1}{2(1 - (v_{2/1}/c)^2)} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{(1 + v_{2/1}/c)^{c/v_{2/1}}}{(1 - v_{2/1}/c)^{c/v_{2/1}}} \right) \right] \quad (88)$$

$$p_{2/1}^{F/\Delta t} = m_0 v_{2/1} \left[ \frac{1}{2(1 - (v_{2/1}/c)^2)} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{\left(1 + \frac{1}{c/v_{2/1}}\right)^{c/v_{2/1}}}{\left(1 - \frac{1}{c/v_{2/1}}\right)^{c/v_{2/1}}} \right) \right] \quad (89)$$

Na tej podstawie dla małych wartości  $v_{2/1} \ll c$  otrzymujemy

$$v_{2/1} \ll c \Rightarrow p_{2/1}^{F/\Delta t} \approx m_0 v_{2/1} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{e}{1/e} \right) \right] = m_0 v_{2/1} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ln(e^2) \right] = m_0 v_{2/1} \quad (90)$$

#### 4.4.4. Energia kinetyczna w STW/F/Δt

Wyznamy wzór na energię kinetyczną. Do wzoru (28) podstawiamy zależność na masę relatywistyczną podaną w (82)

$$dE_{2/1}^{F/\Delta t} = m_{2/1}^{F/\Delta t} \cdot v_{2/1} \cdot dv_{2/1} = m_0 \left[ \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \right]^2 v_{2/1} dv_{2/1} = m_0 c^4 \frac{v_{2/1}}{(c^2 - v_{2/1}^2)^2} dv_{2/1} \quad (91)$$

Energia kinetyczna ciała jest sumą przyrostów jego energii kinetycznej, gdy ciało jest przyspieszane z układu inercjalnego  $U_1$  (ciało ma prędkość 0) do układu inercjalnego  $U_2$  (ciało ma prędkość  $v_{2/1}$ ), czyli

$$E_{2/1}^{F/\Delta t} = m_0 c^4 \int_0^{v_{2/1}} \frac{v_{2/1}}{(c^2 - v_{2/1}^2)^2} dv_{2/1} \quad (92)$$

Z pracy [1] (wzór 58, s. 160) można odczytać, że

$$\int \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{1}{2(a^2 - x^2)} \quad (93)$$

Po zastosowaniu całki (93) do (92) otrzymujemy wzór na energię kinetyczną ciała znajdującego się w układzie  $U_2$  i mierzoną przez obserwatora z układu  $U_1$  w postaci

$$E_{2/1}^{F/\Delta t} = m_0 c^4 \frac{1}{2(c^2 - x^2)} \Big|_0^{v_{2/1}} = \frac{m_0 c^4}{2} \frac{1}{(c^2 - v_{2/1}^2)} - \frac{m_0 c^4}{2} \frac{1}{c^2} \quad (94)$$

$$E_{2/1}^{F/\Delta t} = \frac{m_0 c^2}{2} \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} - \frac{m_0 c^2}{2} = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \quad (95)$$

Wzór na energię kinetyczną (95) został wyprowadzony w pracy [2], dzięki temu, że autor przyjął tam inne założenie niż to, na którym oparta została dynamika znana ze Szczególnej Teorii Względności.

#### 4.4.5. Energia kinetyczna w STW/F/Δt dla małych prędkości

Dla małej prędkości  $v_{2/1} \ll c$  energia kinetyczna (95) sprowadza się do energii kinetycznej z mechaniki klasycznej, gdyż

$$v_{2/1} \ll c \Rightarrow E_{2/1}^{F/\Delta t} \approx \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \quad (96)$$

#### 4.4.6. Siła w STW/F/Δt

Ciało o masie spoczynkowej  $m_0$  jest związane z układem  $U_2$ . Działa na nie siła powodująca przyspieszenie. Dla obserwatora z tego układu siła przyspieszająca ma zgodnie z (24) wartość

$$F_{2/2} = m_0 \frac{dv_{2/2}}{dt_2} \quad (97)$$

Dla obserwatora z układu  $U_1$  siła przyspieszająca ma zgodnie z (25) wartość

$$F_{2/1}^{F/\Delta t} = m_{2/1}^{F/\Delta t} \frac{dv_{2/1}}{dt_1} \quad (98)$$

Jeżeli podzielimy stronami równanie (98) przez (97), to na podstawie (20) i (23) otrzymamy

$$\frac{F_{2/1}^{F/\Delta t}}{F_{2/2}} = \frac{m_{2/1}^{F/\Delta t}}{m_0} \cdot \frac{dt_2}{dt_1} \cdot \frac{dv_{2/1}}{dv_{2/2}} = \frac{m_{2/1}^{F/\Delta t}}{m_0} (1 - (v_{2/1}/c)^2)^{3/2} \quad (99)$$

Na podstawie (82) uzyskamy związek pomiędzy pomiarami tej samej siły przez dwóch różnych obserwatorów

$$F_{2/1}^{F/\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} \cdot F_{2/2} \quad (100)$$

Najmniejszą wartość siły mierzy obserwator z układu inercjalnego, w którym znajduje się ciało.

#### 4.5. Dynamika STW ze stałą masą na upływ czasu obserwatora (czyli STW/ $m/\Delta t$ )

W tym podrozdziale zostanie wyprowadzony model dynamiki ciał oparty na założeniu, że masa ciała podzielona przez upływ czasu w układzie obserwatora jest taka sama dla obserwatora z każdego inercjalnego układu odniesienia (stąd oznaczenie  $m/\Delta t$ ).

##### 4.5.1. Masa relatywistyczna w STW/ $m/\Delta t$

W modelu STW/ $m/\Delta t$  zakładamy, że

$$\frac{m_{2/1}^{m/\Delta t}}{dt_1} = \frac{m_0}{dt_2} \quad (101)$$

Na podstawie (23) otrzymujemy

$$\frac{m_{2/1}^{m/\Delta t}}{dt_1} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2} \cdot dt_1} \quad (102)$$

Stąd masa relatywistyczna ciała znajdującego się w układzie  $U_2$ , widziana z układu  $U_1$ , gdy spełnione jest założenie (101), wyraża się wzorem

$$m_{2/1}^{m/\Delta t} = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} \quad (103)$$

##### 4.5.2. Pęd w STW/ $m/\Delta t$

Ciało o masie spoczynkowej  $m_0$  jest związane z układem  $U_2$ . Aby wyznaczyć pęd tego ciała względem układu  $U_1$  podstawiamy (103) do (27)

$$dp_{2/1}^{m/\Delta t} = m_{2/1}^{m/\Delta t} \cdot dv_{2/1} = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} dv_{2/1} = m_0 c \frac{1}{\sqrt{c^2 - v_{2/1}^2}} dv_{2/1} \quad (104)$$

Pęd ciała jest sumą przyrostów jego pędu, gdy ciało jest przyspieszane z układu inercjalnego  $U_1$  (ciało ma prędkość 0) do układu inercjalnego  $U_2$  (ciało ma prędkość  $v_{2/1}$ ), czyli



$$p_{2/1}^{m/\Delta t} = m_0 c^2 \int_0^{v_{2/1}} \frac{1}{\sqrt{c^2 - v_{2/1}^2}} dv_{2/1} \quad (105)$$

Z pracy [1] (wzór 71, s. 167) można odczytać, że

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0 \quad (106)$$

Po zastosowaniu całki (106) do (105) otrzymujemy wzór na pęd ciała znajdującego się w układzie  $U_2$  i mierzony przez obserwatora z układu  $U_1$  w postaci

$$p_{2/1}^{m/\Delta t} = m_0 c \cdot \arcsin \frac{v_{2/1}}{c} \Big|_0^{v_{2/1}} = m_0 c \cdot \arcsin \frac{v_{2/1}}{c} \quad (107)$$

#### 4.5.3. Pęd w STW/ $m/\Delta t$ dla małych prędkości

Zależności (107) można zapisać również w postaci

$$p_{2/1}^{m/\Delta t} = m_0 v_{2/1} \frac{\arcsin \frac{v_{2/1}}{c}}{\frac{v_{2/1}}{c}} \quad (108)$$

Na tej podstawie dla małych wartości  $v_{2/1} \ll c$  otrzymujemy

$$v_{2/1} \ll c \Rightarrow p_{2/1}^{m/\Delta t} \approx m_0 v_{2/1} \quad (109)$$

#### 4.5.4. Energia kinetyczna w STW/ $m/\Delta t$

Wyznamy wzór na energię kinetyczną. Do wzoru (28) podstawiamy zależność na masę relatywistyczną podaną w (103)

$$dE_{2/1}^{m/\Delta t} = m_{2/1}^{m/\Delta t} \cdot v_{2/1} \cdot dv_{2/1} = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} v_{2/1} dv_{2/1} = m_0 c \frac{v_{2/1}}{\sqrt{c^2 - v_{2/1}^2}} dv_{2/1} \quad (110)$$

Energia kinetyczna ciała jest sumą przyrostów jego energii kinetycznej, gdy ciało jest przyspieszane z układu inercjalnego  $U_1$  (ciało ma prędkość 0) do układu inercjalnego  $U_2$  (ciało ma prędkość  $v_{2/1}$ ), czyli

$$E_{2/1}^{m/\Delta t} = m_0 c \int_0^{v_{2/1}} \frac{v_{2/1}}{\sqrt{c^2 - v_{2/1}^2}} dv_{2/1} \quad (111)$$

Z pracy [1] (wzór 73, s. 167) można odczytać, że

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (112)$$

Po zastosowaniu całki (112) do (111) otrzymujemy wzór na energię kinetyczną ciała znajdującego się w układzie  $U_2$  i mierzoną przez obserwatora z układu  $U_1$  w postaci

$$E_{2/1}^{m/\Delta t} = -m_0 c \sqrt{c^2 - v_{2/1}^2} \Big|_0^{v_{2/1}} = -m_0 c \sqrt{c^2 - v_{2/1}^2} + m_0 c \sqrt{c^2} \quad (113)$$

$$E_{2/1}^{m/\Delta t} = m_0 c^2 - m_0 c \sqrt{c^2 - v_{2/1}^2} = m_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}) \quad (114)$$

#### 4.5.5. Energia kinetyczna w STW/ $m/\Delta t$ dla małych prędkości

Zależności (114) można zapisać również w postaci

$$E_{2/1}^{m/\Delta t} = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \cdot \frac{2c^2}{v_{2/1}^2} \cdot \frac{(1 - \sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2})(1 + \sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2})}{1 + \sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} \quad (115)$$

$$E_{2/1}^{m/\Delta t} = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \cdot \frac{2c^2}{v_{2/1}^2} \cdot \frac{1 - (1 - (v_{2/1}/c)^2)}{1 + \sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} \quad (116)$$

Na tej podstawie dla małych wartości  $v_{2/1} \ll c$  otrzymujemy

$$v_{2/1} \ll c \Rightarrow E_{2/1}^{m/\Delta t} \approx \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \quad (117)$$

#### 4.5.6. Siła w STW/ $m/\Delta t$

Ciało o masie spoczynkowej  $m_0$  jest związane z układem  $U_2$ . Działa na nie siła powodująca przyspieszenie. Dla obserwatora z tego układu siła przyspieszająca ma zgodnie z (24) wartość

$$F_{2/2} = m_0 \frac{dv_{2/2}}{dt_2} \quad (118)$$

Dla obserwatora z układu  $U_1$  siła przyspieszająca ma zgodnie z (25) wartość

$$F_{2/1}^{m/\Delta t} = m_{2/1}^{m/\Delta t} \frac{dv_{2/1}}{dt_1} \quad (119)$$

Jeżeli podzielimy stronami równanie (119) przez (118), to na podstawie (20) i (23) otrzymamy

$$\frac{F_{2/1}^{m/\Delta t}}{F_{2/2}} = \frac{m_{2/1}^{m/\Delta t}}{m_0} \cdot \frac{dt_2}{dt_1} \cdot \frac{dv_{2/1}}{dv_{2/2}} = \frac{m_{2/1}^{m/\Delta t}}{m_0} (1 - (v_{2/1}/c)^2)^{3/2} \quad (120)$$

Na podstawie (103) uzyskamy związek pomiędzy pomiarami tej samej siły przez dwóch różnych obserwatorów

$$F_{2/1}^{m/\Delta t} = (1 - (v_{2/1}/c)^2) \cdot F_{2/2} \quad (121)$$

Największą wartość siły mierzy obserwator z układu inercjalnego, w którym znajduje się ciało.

## 5. Ogólna postać dynamiki

W przedstawionych przykładach przyjęte zostały założenia, które można zapisać w postaciach (30), (46), (68), (80) oraz (101). Na tej podstawie widać, że założenie dla dynamiki relatywistycznej ma postać

$$m_{2/1}^{\{a,b\}} \frac{dv_{2/1}^a}{dt_1^b} = m_0 \frac{dv_{2/2}^a}{dt_2^b}, \quad a, b \in R \quad (122)$$

Na podstawie (20) oraz (23) otrzymujemy

$$m_{2/1}^{\{a,b\}} \frac{dv_{2/1}^a}{dt_1^b} = m_0 \frac{\frac{dv_{2/1}^a}{dt_1}}{(1 - (v_{2/1}/c)^2)^a} \quad (123)$$

Przyjmujemy oznaczenia

$$\{x\} \equiv \{a, b\} \quad \wedge \quad x = a + \frac{b}{2} \in R \quad (124)$$

Teraz na podstawie (123) relatywistyczna masa bezwładności ciała znajdującego się w układzie  $U_2$ , widziana z układu  $U_1$ , gdy spełnione jest założenie (122), wyraża się w dynamice  $\{x\}$  wzorem

$$m_{2/1}^{\{x\}} = m_0 \left[ \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \right]^x \quad (125)$$

Każda taka masa relatywistyczna definiuje inną dynamikę relatywistyczną.

Zgodnie z przedstawionymi przykładami pęd w dynamice  $\{x\}$  wyraża się wzorem (na podstawie formuł (27) oraz (125))

$$p_{2/1}^{\{x\}} = \int_0^{v_{2/1}} dp_{2/1}^{\{x\}} = \int_0^{v_{2/1}} m_{2/1}^{\{x\}} \cdot dv_{2/1} = m_0 \int_0^{v_{2/1}} \left[ \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \right]^x dv_{2/1} \quad (126)$$

$$p_{2/1}^{\{x\}} = m_0 c^{2x} \int_0^{v_{2/1}} \frac{1}{(c^2 - v_{2/1}^2)^x} dv_{2/1} \quad (127)$$

Zgodnie z przedstawionymi przykładami energia kinetyczna w dynamice  $\{x\}$  wyraża się wzorem (na podstawie formuł (28) oraz (125))

$$E_{2/1}^{\{x\}} = \int_0^{v_{2/1}} dE_{2/1}^{\{x\}} = \int_0^{v_{2/1}} m_{2/1}^{\{x\}} \cdot v_{2/1} \cdot dv_{2/1} = m_0 \int_0^{v_{2/1}} \left[ \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \right]^x v_{2/1} dv_{2/1} \quad (128)$$

$$E_{2/1}^{\{x\}} = m_0 c^{2x} \int_0^{v_{2/1}} \frac{v_{2/1}}{(c^2 - v_{2/1}^2)^x} dv_{2/1} \quad (129)$$

Zgodnie z przedstawionymi przykładami zależność pomiędzy siłami w dynamice  $\{x\}$  wyraża się wzorem (na podstawie formuł (24), (25) oraz (20), (23))

$$\frac{F_{2/1}^{\{x\}}}{F_{2/2}} = \frac{m_{2/1}^{\{x\}} \frac{dv_{2/1}}{dt_1}}{m_0 \frac{dv_{2/2}}{dt_2}} = \frac{m_{2/1}^{\{x\}} \frac{dv_{2/1}}{dt_1}}{m_0 \frac{dv_{2/1}}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} \cdot dt_1}} = \frac{m_{2/1}^{\{x\}}}{m_0} (1 - (v_{2/1}/c)^2)^{3/2} \quad (130)$$

Na podstawie (125) otrzymujemy

$$\frac{F_{2/1}^{\{x\}}}{F_{2/2}} = \left[ \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \right]^x (1 - (v_{2/1}/c)^2)^{3/2} = \left[ \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \right]^{x - \frac{3}{2}} \quad (131)$$

## 6. Zestawienie wyprowadzonych dynamik

Zestawienie wyprowadzonych wzorów na pęd oraz energię kinetyczną:

---

Dynamika  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$p_{2/1}^m = m_0 v_{2/1} \quad (132)$$

$$E_{2/1}^m = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \quad (133)$$


---

Dynamika  $\mathbf{x} = 1/2$

$$p_{2/1}^{m/\Delta t} = m_0 c \cdot \arcsin \frac{v_{2/1}}{c} = m_0 v_{2/1} \frac{\arcsin(v_{2/1}/c)}{v_{2/1}/c} \quad (134)$$

$$E_{2/1}^{m/\Delta t} = m_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}) = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} \quad (135)$$


---

Dynamika  $\mathbf{x} = 1$

$$p_{2/1}^{\Delta p} = \frac{m_0 c}{2} \ln \left( \frac{c + v_{2/1}}{c - v_{2/1}} \right) = m_0 v_{2/1} \ln \left( \frac{c + v_{2/1}}{c - v_{2/1}} \right)^{\frac{c}{2v_{2/1}}} \quad (136)$$

$$E_{2/1}^{\Delta p} = \frac{m_0 c^2}{2} \ln \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \ln \frac{1}{[1 - (v_{2/1}/c)^2]^{(c/v_{2/1})^2}} \quad (137)$$


---

Dynamika  $\mathbf{x} = 3/2$

(uznawana obecnie dynamika STW)

$$p_{2/1}^F = m_0 v_{2/1} \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} \quad (138)$$

$$E_{2/1}^F = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{2/1}/c)^2}} - m_0 c^2 = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v_{2/1}^2}{c^2}} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{v_{2/1}^2}{c^2}} \right)} \quad (139)$$


---

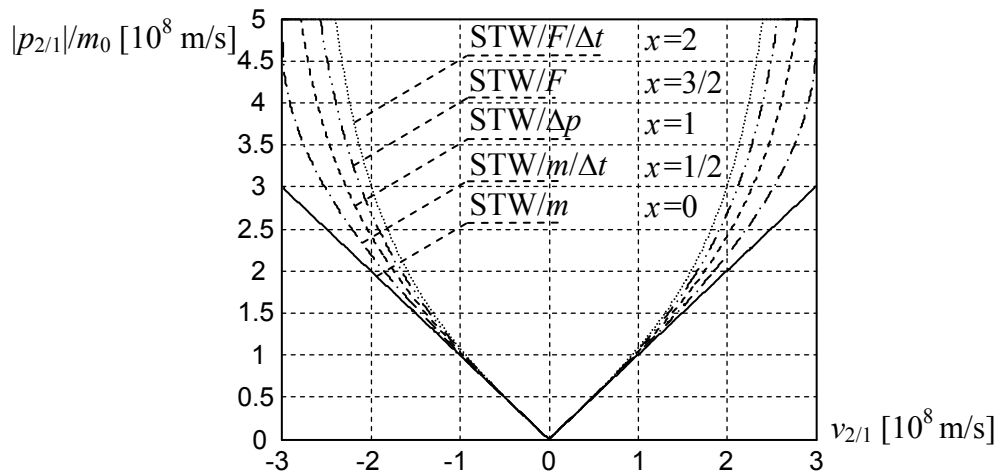
Dynamika  $\mathbf{x} = 2$

$$p_{2/1}^{F/\Delta t} = m_0 v_{2/1} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} + \ln \left( \frac{c + v_{2/1}}{c - v_{2/1}} \right)^{\frac{c}{2v_{2/1}}} \right] \quad (140)$$

$$E_{2/1}^{F/\Delta t} = \frac{m_0 v_{2/1}^2}{2} \frac{1}{1 - (v_{2/1}/c)^2} \quad (141)$$


---

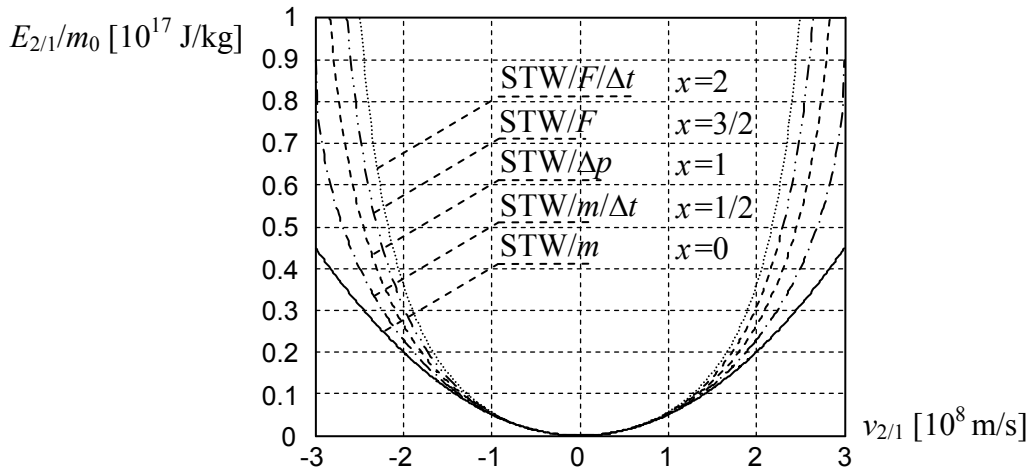
Na rysunku 4 zostały zestawione pędy z wyprowadzonych dynamik.



Rys. 4. Moduł pędu w dynamikach:

$STW/m$  ( $x=0$ ),  $STW/m/\Delta t$  ( $x=1/2$ ),  $STW/\Delta p$  ( $x=1$ ),  $STW/F$  ( $x=3/2$ ) oraz  $STW/F/\Delta t$  ( $x=2$ ).

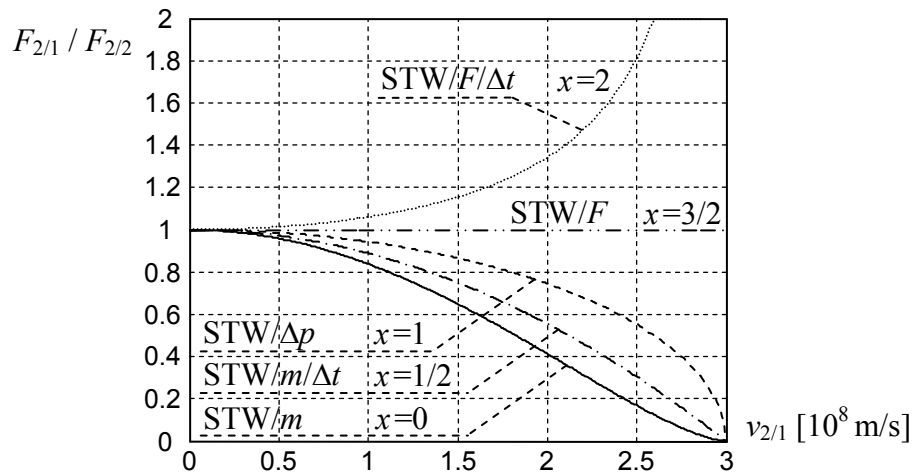
Na rysunku 5 zostały zestawione energie kinetyczne z wyprowadzonych dynamik.



Rys. 5. Energie kinetyczne w dynamikach:

$STW/m$  ( $x=0$ ),  $STW/m/\Delta t$  ( $x=1/2$ ),  $STW/\Delta p$  ( $x=1$ ),  $STW/F$  ( $x=3/2$ ) oraz  $STW/F/\Delta t$  ( $x=2$ ).

Na rysunku 6 zostały zestawione zależności pomiędzy siłami z wyprowadzonych dynamik.



Rys. 6. Związki pomiędzy pomiarami tej samej siły przez dwóch różnych obserwatorów w dynamikach:

$STW/m$  ( $x=0$ ),  $STW/m/\Delta t$  ( $x=1/2$ ),  $STW/\Delta p$  ( $x=1$ ),  $STW/F$  ( $x=3/2$ ) oraz  $STW/F/\Delta t$  ( $x=2$ ).

## 7. Jeszcze ogólniejsza postać dynamiki

Zależność (125) na masę relatywistyczną można jeszcze bardziej uogólnić. W ogólnym przypadku można bowiem przyjąć, że masa relatywistyczna wyraża się wzorem

$$m_{2/1}^{\{f\}} = m_0 \cdot f(v_{2/1}) \quad (142)$$

Gdzie  $f(v_{2/1})$  jest dowolną funkcją ciągłą o następujących własnościach

$$f(v_{2/1}) \geq 0 \quad (143)$$

$$f(0) = 1 \quad (144)$$

$$f(v_{2/1}) = f(-v_{2/1}) \quad (145)$$

Każda funkcja  $f(v_{2/1})$  definiuje inną dynamikę Szczególnej Teorii Względności.

## 8. Wnioski końcowe

W artykule przedstawiona została moja autorska metoda wyprowadzania dynamik w Szczególnej Teorii Względności. Pokazanych zostało pięć przykładów takiego wyprowadzenia.

Wyprowadzenie dynamiki opiera się na dwóch wzorach obowiązujących w kinematyce STW, czyli (20) oraz (23). Aby wyprowadzić dynamikę STW konieczne jest przyjęcie do kinematyki dodatkowego założenia, które pozwala wprowadzić do teorii pojęcia: masy, energii kinetycznej oraz pędu.

Dynamika STW/ $F$  jest obecnie uznawaną dynamiką Szczególnej Teorii Względności. Opiera się ona na założeniu, że każda siły równoległa do osi  $x$  ma taką samą wartość dla obserwatora z każdego inercjalnego układu odniesienia. Możliwe są jednak inne dynamiki zgodne z kinematyką Szczególnej Teorii Względności. Aby je wyprowadzić należy oprzeć się na innym założeniu.

Rozstrzygnięcie, która ze wszystkich możliwych dynamik Szczególnej Teorii Względności jest prawidłowym modelem rzeczywistych procesów powinno być jednym z ważniejszych zadań przyszłej fizyki. Do weryfikacji różnych dynamik użyteczny może być kalorymetr. Urządzenie to umożliwia pomiar ilości ciepła wydzielanego podczas zatrzymania cząstek rozpędzonych do dużych prędkości. Na tej podstawie można wyznaczyć wykresy energii kinetycznej rozpędzonych cząstek w funkcji ich prędkości, analogiczne do tych pokazanych na rysunku 5. Na tej podstawie można wskazać dynamikę, w której energia kinetyczna cząstek jest zgodna z eksperymentami.

Fakt, że w ramach Szczególnej Teorii Względności można wyprowadzić liczne dynamiki bardzo podważa prawdziwość wzoru  $E=mc^2$ . Według naszych badań na podstawie mechaniki relatywistycznej nie można wyprowadzić wzoru wyrażającego energię wewnętrzną materii [4]. Wszystkie wyprowadzenia tego wzoru są błędne. Związek pomiędzy masą oraz energią ( $E=mc^2$ ) można wprowadzić do STW jako niezależne założenie, ale nie wynika on z transformacji Lorentza, ani z założenia (29), na którym oparta jest dynamika STW. Wtedy jednak istnieje potrzeba eksperymentalnego wykazania, jaka dokładnie jest postać takiej zależności (np. dlaczego nie  $E=mc^2/2$ ) oraz eksperymentalnego zbadania, czy czasami postać takiej zależności nie zależy od rodzaju materii, której ona dotyczy.

Przedstawiona metoda wyprowadzania dynamik może zostać wykorzystana także w innych teoriach kinematyki ciał. W monografii [3] wykorzystano ją do wyprowadzania czterech dynamik w Szczególnej Teorii Eteru.

## Bibliografia

- [1] Воднев Владимир, Наумович Адольф и Наумович Нил. *Основные математические формулы. Справочник*. Минск, Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР, 1988, ISBN 5-339-00083-4.
- [2] Osiak Zbigniew, *Energia w Szczególnej Teorii Względności* (język polski), eBook 2011, [www.rw2010.pl](http://www.rw2010.pl), ISBN 978-83-272-3465-0.  
Osiak Zbigniew, *Energy in Special Relativity* (język angielski). eBook 2011, [www.vixra.org/abs/1512.0449](http://www.vixra.org/abs/1512.0449), ISBN 978-83-272-3448-3.
- [3] Szostek Karol, Szostek Roman, *Szczególna Teoria Eteru* (język polski). Wydawnictwo Amelia, Rzeszów, Polska, 2015, ([www.ste.com.pl](http://www.ste.com.pl)), ISBN 978-83-63359-77-5.  
Szostek Karol, Szostek Roman, *Special Theory of Ether* (język angielski). Publishing house AMELIA, Rzeszów, Poland, 2015, ([www.ste.com.pl](http://www.ste.com.pl)), ISBN 978-83-63359-81-2.
- [4] Szostek Karol, Szostek Roman,  *$E=mc^2$  jako składowa energii kinetycznej w prawie dla energii kinetycznej*, 44 Zjazd Fizyków Polskich, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław, 10-15 września 2017.
- [5] Szostek Karol, Szostek Roman, *Metoda wyprowadzania licznych dynamik w Szczególnej Teorii Względności* (język polski), viXra 2017, [www.vixra.org/abs/1712.0387](http://www.vixra.org/abs/1712.0387).  
Szostek Karol, Szostek Roman, *Derivation method of numerous dynamics in the Special Theory of Relativity* (język angielski), viXra 2017, <http://www.vixra.org/abs/1712.0480>.

## Derivation method of numerous dynamics in the Special Theory of Relativity

Roman Szostek

*Rzeszow University of Technology, Department of Quantitative Methods, Rzeszow, Poland  
rszostek@prz.edu.pl*

### Abstract:

The article presents my innovative method of deriving dynamics in the Special Theory of Relativity. This method enables to derive infinitely many dynamics in relativistic mechanics. I have shown five examples of these derivations. In this way, I have shown that the dynamics known today as the dynamics of Special Theory of Relativity is only one of infinitely possible. There is also no reason to treat this relativistic dynamics as exceptional, either for experimental or theoretical reasons. Therefore, determination of which possible dynamics of relativistic mechanics is a correct model of reality remains an open problem of physics.