

Halbklassische Berechnung der Schalenenergien der gg-Kerne mit Hilfe der Casimir-Kräfte

von Halil Güveniş, Istanbul

E-mail: guevenis@rocketmail.com

Abstract

In the present paper we calculate in semi-classical approximation the shell energies of even-even nuclei with the help of Casimir forces. We first demonstrate that for the total binding energy of the helium nucleus, essentially tangential and radial Casimir forces, introduced by us, are responsible. In a second step, we carry out the same calculation for the beryllium nucleus and in this case we also find out that for the total binding energy of the beryllium nucleus, essentially tangential and radial Casimir forces, introduced by us, are responsible. Finally, we calculate some characteristic shell quantities of selected even-even nuclei – ^8Be , ^{16}O , ^{24}Mg , ^{32}S , ^{40}Ca , ^{48}Cr , ^{56}Ni , ^{64}Ge , ^{96}Cd – and we show that with increasing shell radius a strongly declining shell energy spectrum follows. We give the shell energy spectrum of the exemplary selected nucleus ^{96}Cd and we show how the shell energies are composed of tangential and radial acting Casimir energies. Altogether, we obtain a fascinatingly simple and intuitive model of even-even nuclei, its correctness however can only be verified by solving the fundamental equations of quantum hydrodynamics in the interior of the nucleons.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit berechnen wir in halbklassischer Näherung die Schalenenergien der gg-Kerne mit Hilfe der Casimir-Kräfte. Wir zeigen zunächst, dass für die Gesamtbindungsenergie des Helium-Kerns im Wesentlichen die von uns eingeführten tangential und radial wirkenden Casimir-Kräfte verantwortlich sind. Anschließend führen wir die gleiche Berechnung für den Beryllium-Kern durch und gelangen auch hier zu der Erkenntnis, dass für die Gesamtbindungsenergie des Beryllium-Kerns im Wesentlichen die von uns eingeführten tangential und radial wirkenden Casimir-Kräfte verantwortlich sind. Zum Schluss berechnen wir die charakteristischen Schalengrößen ausgewählter gg-Kerne – ^8Be , ^{16}O , ^{24}Mg , ^{32}S , ^{40}Ca , ^{48}Cr , ^{56}Ni , ^{64}Ge , ^{96}Cd – und zeigen, dass mit zunehmendem Schalenradius ein stark abfallendes Schalenenergiespektrum resultiert. Für das exemplarisch ausgewählte Nuklid ^{96}Cd geben wir das Schalenenergiespektrum an und zeigen, wie sich die Schalenenergien aus tangential und radial wirkenden Casimir-Energien zusammensetzen. Insgesamt erhalten wir ein faszinierend einfaches und anschauliches Modell der gg-Kerne, dessen Korrektheit allerdings erst durch Lösen der quantenhydrodynamischen Grundgleichungen im Innenraum der Nukleonen verifiziert werden kann.

Key words: shell energies and the total binding energy of even-even nuclei, tangential and radial acting Casimir forces, shell energy spectrum of even-even nuclei, fundamental equations of quantum hydrodynamics.

1 Einleitung

Um die Stabilität der Elementarteilchen und der Atomkerne zu erklären, wurden viele Versuche unternommen, Kernkräfte durch Casimir-Kräfte zu beschreiben [1-3]. Doch all diese Versuche endeten mit der Feststellung, dass die Casimir-Kräfte von ihrer Größe her zwar mit Kernkräften vergleichbar sind, aber zum falschen Vorzeichen, d. h. zu abstoßenden Kernkräften, führen. – Im Folgenden möchten wir zeigen, dass diese Feststellung nur im Rahmen einer bestimmten Geometrie korrekt ist; ändert sich

die Geometrie, so ändern sich auch die in Frage kommenden Casimir-Kräfte. Wir haben in einer vorangegangenen Arbeit ausführlich dargestellt, dass durch geeignete Photondruckannahmen gewisse räumliche Symmetrien ausgezeichnet sind und gestützt auf diese Symmetrien Schritt für Schritt die Geometrie der Atomkerne bestimmt werden kann [4]. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, gestützt auf diese Geometrie die Schalenenergien der gg-Kerne mit Hilfe der Casimir-Kräfte in halbklassischer Näherung zu berechnen.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: Im Abschnitt 2 wird die Gesamtbindungsenergie des Helium-Kerns in halbklassischer Näherung mit Hilfe der Casimir-Kräfte berechnet. Im Abschnitt 3 führen wir die gleiche Berechnung für den Beryllium-Kern durch. Im Abschnitt 4 berechnen wir die charakteristischen Schalengrößen ausgewählter gg-Kerne und diskutieren die Rechenergebnisse für verschiedene höhere Kernschalen. Abschnitt 5 ist für Schlussfolgerungen vorgesehen.

2 Der Helium-Kern

Der einfachste gg-Kern ist ${}^4\text{He}$. Wir beginnen daher unsere halbklassische Berechnung der Schalenenergien der gg-Kerne mit dem Helium-Kern.

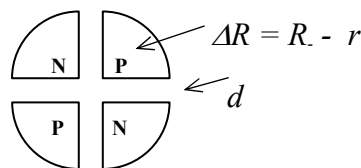


Abbildung 1: Geometrie des Helium-Kerns

${}^4\text{He}$ besteht aus zwei Protonen und zwei Neutronen, die aus Gründen der Ladungssymmetrie einander quer gegenüberstehen (Abb. 1). Protonen und Neutronen bilden je ein Viertel einer Kugelschale mit dem Volumen

$$V_{\text{He}} = (4\pi/3) (R^3 - r^3), \quad (1)$$

wobei r der Radius der inneren und R der Radius der äußeren Kugelschalenfläche sind. Jedes Proton und jedes Neutron sind an zwei Seiten durch den Spaltabstand d voneinander getrennt und haben die gemeinsame Fläche

$$F_{He} = \pi (R^2 - r^2) / 2 . \quad (2)$$

Der Massen- bzw. Ladungsschwerpunkt der einzelnen Nukleonen liegt, vom Mittelpunkt der Gesamtkugel aus gerechnet, auf der Symmetrieachse im Abstand von

$$r = (3/4)(R^4 - r^4)/(R^3 - r^3) + r + d / 2^{1/2} . \quad (3)$$

Da Protonen und Neutronen aus Symmetriegründen den mit ihrem Massen- bzw. Ladungsschwerpunkt gleichgerichteten Spin $1/2 \hbar$ haben, drehen sie sich stets um ihre eigene Symmetrieachse herum. Aufgrund dieser Rotationsbewegung kommt jedem benachbarten Proton-Neutron-Paar die Rotationsenergie

$$\begin{aligned} E_{Rot} &= \hbar^2 I(I+1)/2\theta \\ &= \hbar^2 (2 \cdot 1/2 \cdot 0,7071)(2 \cdot 1/2 \cdot 0,7071 + 1)/[2(M_P + M_N)((2/5)R^2 + (d/2)^2)] \quad (4) \\ &= 12,5148 \text{ MeV fm}^2 / (0,4R^2 + 0,25 d^2) \end{aligned}$$

zu, wobei $\theta = (M_P + M_N)((2/5)R^2 + (d/2)^2)$ das Trägheitsmoment des Proton-Neutron-Paares ist. Allerdings muss an dieser Stelle festgestellt werden, dass die Rotationsenergie zur Gesamtbindungsenergie des Helium-Kerns nicht beiträgt. Obwohl an einem einzelnen Spalt jedes Proton-Neutron-Paar einen nicht verschwindenden Spin hat, addiert sich der Gesamtspin des Helium-Kerns wegen entgegengesetzter Richtung an vier verschiedenen Spalten zu Null; damit wird auch die Gesamtrrotationsenergie Null.

Die von der Rotationsenergie (4) verursachte Fliehkraft in d-Richtung lautet:

$$K_{Rot} = - \partial E_{Rot} / \partial d = 6,2574 \text{ MeV fm}^2 d / (0,4 R^2 + 0,25 d^2)^2 , \quad (5)$$

d. h. diese Kraft muss durch Kernbindungskräfte kompensiert werden, damit der Kern nicht auseinander bricht. Wir nehmen an, dass für die Kompensation zwei Arten von Casimir-Energien in Frage kommen:

$$\begin{aligned}
E_{Cas}(d) &= -2 (\pi^2 \hbar c / 720) F_{He} / d^3 - 2 (\pi^3 \hbar c / 720) R [1/s_1^2 - 1/s_2^2] \\
&= - (\pi^3 \hbar c / 720) [(R^2 - r^2) / d^3 + 2/R - 2R/(R+d)^2] \\
&= - 8,4977 [(R^2 - r^2) / d^3 + 2/R - 2R/(R+d)^2] \text{ MeV fm} ,
\end{aligned} \tag{6}$$

mit $s_1 = R$, $s_2 = R + d$.

Die dazugehörigen Kernbindungskräfte in d-Richtung sind

$$K_{Cas}(d) = - \partial E_{Cas} / \partial d = - 8,4977 [3 (R^2 - r^2) / d^4 - 4 R / (R+d)^3] \text{ MeV fm} . \tag{7}$$

Die erste dieser Kräfte tritt auf, wenn zwei planparallele Platten (Wände der Nukleonen) im Abstand d einander gegenüberstehen (Abb. 1). Die zweite Kraft tritt auf, wenn die besagten planparallelen Wände der Nukleonen vor einem Krümmungsradius R im Abstand $s_1 = R$ bzw. $s_2 = R + d$ aufgestellt sind (Abb. 1). Im Kräftegleichgewicht kompensieren die beiden Casimir-Kräfte in (7) die durch die Rotationsbewegung verursachte Fliehkraft (5):

$$\begin{aligned}
K_d / \text{MeV fm} &= 6,2574 \text{ fm } d / (0,4 R^2 + 0,25 d^2)^2 \\
&\quad - 8,4977 [3 (R^2 - r^2) / d^4 - 4 R / (R+d)^3] = 0 .
\end{aligned} \tag{8}$$

Ferner erzeugt der Hohlraum in der Mitte des Kerns die von den Krümmungsradien r und R abhängigen Casimir-Kräfte [5]

$$\begin{aligned}
K_{Cas}(r, R) &= - (\pi^3 \hbar c / 720) R [2 r / ((R + r) s_3^3) - 2 r / ((R + r) s_4^3)] \\
&= - (\pi^3 \hbar c / 720) R [2 r / ((R + r) (R - r)^3) - 2 r / ((R + r) (R + r + 2^{1/2} d)^3)] \\
&= - 8,4977 R [2 r / ((R + r) (R - r)^3) - 2 r / ((R + r) (R + r + 2^{1/2} d)^3)] \text{ MeV fm}
\end{aligned} \tag{9}$$

mit $s_3 = R - r$, $s_4 = R + r + 2^{1/2} d$.

Den insgesamt anziehenden radialen Casimir-Kräften in (9) wirkt die abstoßende Coulomb-Kraft

$$K_C = (1/4\pi\epsilon_0) e^2 / (2r)^2 \\ = 1,44 \text{ MeV fm} / [(3/2) (R^4 - r^4)/(R^3 - r^3) + 2r + 2^{1/2}d]^2 \quad (10)$$

entgegen. Im Kräftegleichgewicht ergibt sich die radiale Gleichgewichtsbedingung

$$K_r / \text{MeV fm} = - 8,4977 R [2r / ((R+r)(R-r)^3) - 2r / ((R+r)(R+r+2^{1/2}d)^3)] \\ + 1,44 / [(3/2) (R^4 - r^4)/(R^3 - r^3) + 2r + 2^{1/2}d]^2 = 0. \quad (11)$$

Für 4 Spalte und 4 Nukleonen im Heliumkern erhalten wir die Gesamtbindungsenergie

$$E = 4 E_{Cas}(d) + 4 E_{Cas}(r, R) + E_C \\ = - 4 \cdot 8,4977 [(R^2 - r^2) / d^3 + 2 / R - 2R / (R+d)^2] \text{ MeV fm} \quad (12) \\ - 4 \cdot 8,4977 R [r / ((R+r)(R-r)^2) - r / ((R+r)(R+r+2^{1/2}d)^2)] \text{ MeV fm} \\ + 1,44 \text{ MeV fm} / [(3/2) (R^4 - r^4)/(R^3 - r^3) + 2r + 2^{1/2}d].$$

Wenn wir in (8), (11) und (12) die neuen Variablen (d/R) und (r/R) einführen, so erhalten wir drei Bestimmungsgleichungen für die Gesamtbindungsenergie:

$$K_d R^2 / \text{MeV fm} = 6,2574 \text{ fm} (d/R) / [R(0,4 + 0,25 (d/R))^2] \quad (13) \\ - 3 \cdot 8,4977 (1 - (r/R)^2) / (d/R)^4 + 4 \cdot 8,4977 / (1 + (d/R))^3 = 0,$$

$$K_r R^2 / \text{MeV fm} = - 2 \cdot 8,4977 (r/R) / [(1 + (r/R))(1 - (r/R))^3] \\ + 2 \cdot 8,4977 (r/R) / [(1 + (r/R))(1 + (r/R) + 2^{1/2}(d/R))^3] \quad (14) \\ + 1,44 / [(3/2) (1 - (r/R)^4) / (1 - (r/R)^3) + 2(r/R) + 2^{1/2}(d/R)]^2 = 0,$$

$$E = - 4 \cdot 8,4977 [(1 - (r/R)^2) / (R(d/R)^3) + 2 / R - 2 / (R(1 + (d/R))^2)] \text{ MeV fm} \\ - 4 \cdot 8,4977 [(r/R) / (R((1 + (r/R))(1 - (r/R))^2) - (r/R) / (R(1 + (r/R))(1 + (r/R)) \\ + 2^{1/2}(d/R))^2)] \text{ MeV fm} + 1,44 \text{ MeV fm} / [R((3/2) (1 - (r/R)^4) / (1 - (r/R)^3) \\ + 2(r/R) + 2^{1/2}(d/R))] = - 28,28 \text{ MeV}. \quad (15)$$

Wir möchten nun mit Hilfe der Bestimmungsgleichungen (13), (14) und (15) zeigen, dass für die Gesamtbindungsenergie des Helium-Kerns im Wesentlichen die von uns eingeführten Casimir-Kräfte verantwortlich sind. Die Gleichungen (13), (14) und (15) sind derart kompakt, dass wir die Variablen (d/R) , (r/R) , R und die einzelnen Kraft- und Energiewerte nur durch numerisches Rechnen ermitteln können:



$R [fm]$	r/R	d/R	$r [fm]$	$d [fm]$	$E [MeV]$	$E_{exp} [MeV]$
2,4351	0,007275	1,37169	0,017715	3,3402	- 28,2819	- 28,28

$$K_d R^2 / MeV fm = 4,6528 - 7,2007 + 2,5479 = 0$$

$$K_r R^2 / MeV fm = - 0,1256 + 0,0048 + 0,1207 = 0$$

$$\begin{aligned}
 & 4 E_{Cas} (d) + 4 E_{Cas} (r, R) + E_C = E [MeV] \\
 & - 5,4082 - 0,1023 + 0,1712 \\
 & - 27,9174 + 0,0116 \\
 & + 4,9632 \\
 & \text{-----} \\
 & - 28,3624 - 0,0907 + 0,1712 = - 28,2819
 \end{aligned}$$

Bemerkenswert an diesem Ergebnis ist, dass die Gesamtbindungsenergie des Helium-Kerns ausschließlich aus tangential wirkenden Casimir-Energien $4 E_{Cas} (d)$ besteht. Die radial wirkenden Casimir-Energien $4 E_{Cas} (r, R)$ spielen nur eine untergeordnete Rolle, weil die Coulomb-Energie E_C schwach entwickelt ist. Trotzdem ergibt die Summe der radialen Energien $E_r = 4 E_{Cas} (r, R) + E_C = 0,0805 MeV$, d. h. wenn zwei Helium-Kerne versuchen, einander näher zu kommen und einen Beryllium-Kern zu bilden, so begegnen sie in radialer Richtung zunächst einer abstoßenden Coulomb-Kraft. Erst wenn sie es schaffen, durch Zuführung zusätzlicher Energie ihre Wände zu planparallelen Platten umzuformen und einander so nahe zu kommen wie der Spaltabstand $d = 3,3402 fm$, dann können sie zu einem Beryllium-Kern fusionieren und ihre Gesamtbindungsenergie um $0,0805 MeV$ verringern.

Wenn wir nach (1) das Volumen des Helium-Kerns berechnen, dann erhalten wir $V_{He} = 60,4838 \text{ fm}^3$. Das ist erstaunlich, weil das Volumen von vier *freien* Nukleonen ungefähr $V_{o4} = 4 (4\pi/3) (1,3 \text{ fm})^3 = (4\pi/3) (2,0636 \text{ fm})^3 = 36,81 \text{ fm}^3$ beträgt. Obwohl nach (8) und (11) die Nukleonen im Helium-Kern im Gegensatz zu freien Nukleonen unter tangentialem und radialem Druck stehen, ist ihr Radius nicht unter $2,0636 \text{ fm}$ gefallen, sondern bis $2,4351 \text{ fm}$ gestiegen; hier liegt die schwache Stelle in unserem halbklassischen Modell. Da in (8) und (11) der quantentheoretische Term für die innere Reaktion des Nukleons auf eine äußere Kraftausübung fehlt, wird für die gebundenen Nukleonen systematisch ein größerer Radius errechnet, als es eigentlich der Fall ist. Da wir uns in der vorliegenden Arbeit in erster Linie für den Beitrag der Casimir-Kräfte zur Gesamtbindungsenergie der gg-Kerne interessieren, lassen wir den systematischen Fehler bei der Berechnung der Kernradien außer Acht und gehen zum nächsten gg-Kern, zum Beryllium-Kern, über.

3 Der Beryllium-Kern

${}^8\text{Be}$ besteht aus vier Protonen und vier Neutronen, die aus Gründen der Ladungssymmetrie einander quer gegenüberstehen. Protonen und Neutronen bilden je ein Achtel einer Kugelschale mit dem Volumen

$$V_{Be} = (4\pi/3) (R^3 - r^3), \quad (16)$$

wobei r der Radius der inneren und R der Radius der äußeren Kugelschalenfläche sind. Jedes Proton und jedes Neutron sind an drei Seiten durch den Spaltabstand d voneinander getrennt und haben die gemeinsame Fläche

$$F_{Be} = \pi (R^2 - r^2) / 4. \quad (17)$$

Der Massen- bzw. Ladungsschwerpunkt der einzelnen Nukleonen liegt, vom Mittelpunkt der Gesamtkugel aus gerechnet, auf der Symmetrieachse im Abstand von

$$\underline{r} = (3/4)(R^4 - r^4)/(R^3 - r^3) + r + d / 2^{1/2}. \quad (18)$$

Während der Helium-Kern in zwei Dimensionen symmetrisch ist, besitzt der Beryllium-Kern dreidimensionale Symmetrie, d. h. die Geometrie und die Ladungs- und die Spinverteilung des Beryllium-Kerns bleiben bei Drehungen in eine x-beliebige Richtung unverändert. Das schafft für zentralsymmetrische Potentiale die Grundlage, über dem Beryllium-Kern weitere Protonen und Neutronen in Form von Kernschalen zu strukturieren. Der Beryllium-Kern bildet also die erste Schale, über der sich weitere Kernschalen durch wiederholte Anwendung des Beryllium-Kerns in Form von konzentrischen Kugelschalen nach der magischen Zahl 8 anordnen können (Abb. 2). Die Gesamtbindungsenergie der gg-Kerne ergibt sich dann als Summe ihrer Schalenenergien. Wir möchten daher im Folgenden die charakteristischen Größen zweier aufeinander folgender Kernschalen („Beryllium-Kerne“) stellvertretend für alle anderen Kugelschalen berechnen.

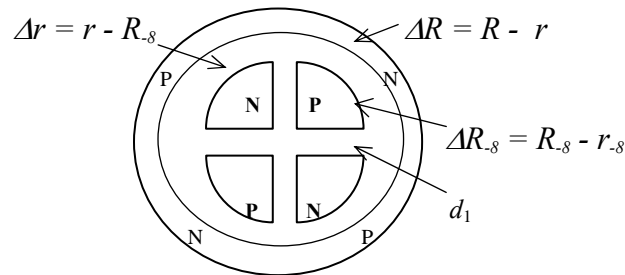


Abbildung 2: Geometrie der ersten und der zweiten Schale

Da Protonen und Neutronen aus Symmetriegründen den mit ihrem Massen- bzw. Ladungsschwerpunkt gleichgerichteten Spin $1/2 \hbar$ haben, drehen sie sich stets um ihre eigene Symmetrieachse herum. Aufgrund dieser Rotationsbewegung kommt jedem benachbarten Proton-Neutron-Paar im Beryllium-Kern die Rotationsenergie

$$\begin{aligned}
E_{Rot} &= \hbar^2 I(I+1)/2\theta \\
&= \hbar^2 (2 \cdot 1/2 \cdot 0,7071)(2 \cdot 1/2 \cdot 0,7071 + 1)/[2(M_P + M_N)((2/5)R^2 + (d/2)^2)] \\
&= 12,5148 \text{ MeV fm}^2 / (0,4R^2 + 0,25 d^2)
\end{aligned} \tag{19}$$

zu. Die von der Rotationsenergie (19) verursachte Fliehkraft in d-Richtung lautet:

$$K_{Rot} = - \partial E_{Rot} / \partial d = 6,2574 \text{ MeV fm}^2 d / (0,4 R^2 + 0,25 d^2)^2, \tag{20}$$

d. h. diese Kraft muss durch Kernbindungskräfte kompensiert werden, damit der Kern nicht auseinander bricht. Wir nehmen an, dass für die Kompensation zwei Arten von Casimir-Energien in Frage kommen:

$$\begin{aligned}
E_{Cas} (d) &= - 2 (\pi^2 \hbar c / 720) F_{Be} / d^3 - 2 (\pi^3 \hbar c / 720) R [1/s_1^2 - 1/s_2^2] \\
&= - (\pi^3 \hbar c / 720) [(R^2 - r^2) / 2d^3 + 2/R - 2R/(R+d)^2] \\
&= - 8,4977 [(R^2 - r^2) / 2d^3 + 2/R - 2R/(R+d)^2] \text{ MeV fm},
\end{aligned} \tag{21}$$

mit $s_1 = R$, $s_2 = R + d$.

Die dazugehörigen Kernbindungskräfte in d-Richtung sind

$$K_{Cas} (d) = - \partial E_{Cas} / \partial d = - 8,4977 [3 (R^2 - r^2) / 2 d^4 - 4 R / (R+d)^3] \text{ MeV fm}. \tag{22}$$

Im Kräftegleichgewicht kompensieren die beiden Casimir-Kräfte in (22) die durch die Rotationsbewegung verursachte Fliehkraft (20):

$$\begin{aligned}
K_d / \text{MeV fm} &= 6,2574 \text{ fm} d / (0,4 R^2 + 0,25 d^2)^2 \\
&\quad - 8,4977 [3 (R^2 - r^2) / 2 d^4 - 4 R / (R+d)^3] = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Ferner erzeugen die Hohlräume zwischen den Kernschalen in radialer Richtung die von den Krümmungsradien r , R und R_s abhängigen Casimir-Kräfte (Abb. 2)

$$\begin{aligned}
K_{Cas}(r, R) &= -(\pi^3 \hbar c / 720) R [2 r / ((R + r) s_3^3) - 2 r / ((R + r) s_4^3)] \\
&+ (\pi^3 \hbar c / 720) R_{.8} [2 r / ((R_{.8} + r) s_5^3) - 2 r / ((R_{.8} + r) s_6^3)] \quad (24) \\
&= -8,4977 [2 r R / ((R + r) (R - r)^3) - 2 r R / ((R + r) (R + r + 2^{1/2} d_1)^3) \\
&- 2 r R_{.8} / ((R_{.8} + r) (r - R_{.8})^3) + 2 r R_{.8} / ((R_{.8} + r) (r + R_{.8} + 2^{1/2} d_1)^3)] \text{ MeV fm}
\end{aligned}$$

mit $s_3 = R - r$, $s_4 = R + r + 2^{1/2} d_1$,
 $s_5 = r - R_{.8}$, $s_6 = r + R_{.8} + 2^{1/2} d_1$,
 $d_1 :=$ Spaltabstand der ersten Schale.

Den insgesamt anziehenden radialen Casimir-Kräften in (24) wirkt die abstoßende Coulomb-Kraft

$$\begin{aligned}
K_C &= (1/4 \pi \epsilon_0) Z e^2 / \underline{r}^2 \\
&= 1,44 Z \text{ MeV fm} / [(3/4) (R^4 - r^4)/(R^3 - r^3) + r + d_1/2^{1/2}]^2 \quad (25)
\end{aligned}$$

entgegen. Im Kräftegleichgewicht ergibt sich die radiale Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned}
K_r / \text{MeV fm} &= -2 \cdot 8,4977 [r R / ((R + r) (R - r)^3) - r R / ((R + r) (R + r + 2^{1/2} d_1)^3) \\
&- r R_{.8} / ((R_{.8} + r) (r - R_{.8})^3) + r R_{.8} / ((R_{.8} + r) (r + R_{.8} + 2^{1/2} d_1)^3)] \\
&+ 1,44 Z / [(3/4) (R^4 - r^4)/(R^3 - r^3) + r + d_1/2^{1/2}]^2 = 0. \quad (26)
\end{aligned}$$

Für 12 Spalte, 8 Nukleonen und 4 Protonen im Beryllium-Kern erhalten wir die Schalenenergie

$$\begin{aligned}
E &= 12 E_{Cas}(d) + 8 E_{Cas}(r, R) + 4 E_C \\
&= -12 \cdot 8,4977 [(R^2 - r^2) / 2d^3 + 2/R - 2R/(R+d)^2] \text{ MeV fm} \\
&- 8 \cdot 8,4977 (r R / (R + r)) [1/(R - r)^2 - 1/(R + r + 2^{1/2} d_1)^2] \text{ MeV fm} \quad (27) \\
&+ 8 \cdot 8,4977 (r R_{.8} / (R_{.8} + r)) [1/(r - R_{.8})^2 - 1/(r + R_{.8} + 2^{1/2} d_1)^2] \text{ MeV fm} \\
&+ 4 \cdot 1,44 Z / [(3/4) (R^4 - r^4)/(R^3 - r^3) + r + d_1/2^{1/2}] \text{ MeV fm}.
\end{aligned}$$

Wenn wir in (23), (26) und (27) die neuen Variablen (d/R) und (r/R) einführen, so erhalten wir drei Bestimmungsgleichungen für die Schalenenergien:

$$K_d R^2 / \text{MeV fm} = 6,2574 \text{ fm } (d/R) / [R (0,4 + 0,25 (d/R)^2)^2] \quad (28)$$

$$- 3 \cdot 8,4977 (1 - (r/R)^2) / (2 (d/R)^4) + 4 \cdot 8,4977 / (1 + (d/R))^3 = 0 ,$$

$$K_r / \text{MeV fm} = - 16,9954 [(r/R)/(1 + (r/R))(1/R^2(1 - (r/R))^3$$

$$- 1/R^2((r/R) + 1 + 2^{1/2} (d_1/R))^3]$$

$$+ 16,9954 [(r/R)b_{-8} / (b_{-8} + (r/R))(1/R^2((r/R) - b_{-8})^3$$

$$- 1/R^2((r/R) + b_{-8} + 2^{1/2} (d_1/R))^3]$$

$$+ 1,44 Z / R (((3/4) (1 - (r/R)^4)/(1 - (r/R)^3) + (r/R) + 2^{1/2}(d_1/2R))^2) = 0 , \quad (29)$$

$$E = [- 12 \cdot 8,4977 [(1 - (r/R)^2)/2(d/R)^3 + 2 - 2/(1+(d/R))^2]$$

$$- 8 \cdot 8,4977 ((r/R) / (1 + (r/R)) [1 / (1 - (r/R))^2$$

$$- 1/((r/R) + 1 + 2^{1/2} (d_1/R))^2]$$

$$+ 8 \cdot 8,4977 ((r/R) b_{-8} / (b_{-8} + (r/R)) [1 / ((r/R) - b_{-8})^2$$

$$- 1/((r/R) + b_{-8} + 2^{1/2} (d_1/R))^2]$$

$$+ 4 \cdot 1,44 Z / (((3/4) (1 - (r/R)^4)/(1 - (r/R)^3) + (r/R) + (d_1/R)/2^{1/2})] \text{ MeV fm} / R , \quad (30)$$

mit $R_{-8} = b_{-8} R = (R_{-8} / R) R$.

Wir möchten nun mit Hilfe der Bestimmungsgleichungen (28), (29) und (30) zeigen, dass für die Gesamtbindungsenergie des Beryllium-Kerns im Wesentlichen die von uns eingeführten Casimir-Kräfte verantwortlich sind. Die Gleichungen (28), (29) und (30) sind derart kompakt, dass wir die Variablen (d/R) , (r/R) , R und die einzelnen Kraft- und Energiewerte nur durch numerisches Rechnen ermitteln können:

⁸Be

R [fm]	r/R	d/R	r [fm]	d [fm]	E [MeV]	E_{exp} [MeV]
3,5123	0,2216	1,13132	0,778326	3,9735	- 56,4805	- 56,48

$$\begin{aligned}
K_d R^2 / \text{MeV fm} &= 3,8883 - 7,3992 + 3,5109 = 0 \\
K_r / \text{MeV fm} &= -0,5299 + 0,0111 + 0,5188 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12 E_{Cas} (d) + 8 E_{Cas} (r, R) + 4E_C &= E [\text{MeV}] \\
- 9,5332 - 5,7948 + 3,6895 & \\
- 58,0659 + 0,4410 & \\
+ 12,7827 & \\
\hline
- 54,8163 - 5,3537 + 3,6895 &= - 56,4805
\end{aligned}$$

Die Gesamtbindungsenergie des Beryllium-Kerns besteht also fast ausschließlich aus den tangential wirkenden Casimir-Energien in Höhe von $- 54,8163 \text{ MeV}$. Die radial wirkenden Energien in Höhe von $E_r = 8 E_{Cas} (r, R) + 4E_C = - 1,6642 \text{ MeV}$ leisten, prozentual gesehen, nur einen geringen Beitrag zur Gesamtbindungsenergie des Beryllium-Kerns. Sie reichen aber vollkommen aus, dass der Beryllium-Kern, im Gegensatz zum Helium-Kern, auf vorbeiziehende Neutronen besonders attraktiv wirkt.

Das Volumen des Beryllium-Kerns nach (16) beträgt $V_{Be} = 179,5195 \text{ fm}^3$. Das ist gegenüber dem Volumen von acht freien Nukleonen $V_{o8} = 8 (4\pi/3) (1,3 \text{ fm})^3 = (4\pi/3) (2,6 \text{ fm})^3 = 73,6222 \text{ fm}^3$ zu groß. Obwohl die Nukleonen im Beryllium-Kern unter tangentialem und radialem Druck stehen, ist ihr Radius nicht unter $2,6 \text{ fm}$ gedrückt worden, sondern bis $3,5123 \text{ fm}$ gestiegen; hier liegt die schwache Stelle in unserem halbklassischen Modell. Da wir in (23) und (26) die bei einer äußeren Kraftausübung auftretende, innere quantenhydrodynamische Gegenkraft der Nukleonen nicht mit berücksichtigt haben, erhalten wir systematisch einen größeren Radius, als es erlaubt ist. Wie bereits angekündigt, möchten wir diesen systematischen Fehler zunächst beiseite lassen und uns nur für den Beitrag der Casimir-Kräfte zu Schalenenergien der gg-Kerne interessieren.

4 Höhere Kernschalen

Während ${}^8\text{Be}$ aus einer einzigen Kernschale besteht, besitzen alle anderen gg-Kerne $A / 8$ Kernschalen, so z. B. ${}^{16}\text{O}$ 2, ${}^{56}\text{Ni}$ 7 und ${}^{96}\text{Cd}$ 12 Schalen. Wir möchten nun mit Hilfe der Bestimmungsgleichungen (28), (29) und (30) zeigen, dass für die Schalenenergien der gg-Kerne im Wesentlichen die von uns eingeführten Casimir-Kräfte verantwortlich sind. Wir haben die charakteristischen Schalengrößen ausgewählter gg-Kerne – ${}^8\text{Be}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{24}\text{Mg}$, ${}^{32}\text{S}$, ${}^{40}\text{Ca}$, ${}^{48}\text{Cr}$, ${}^{56}\text{Ni}$, ${}^{64}\text{Ge}$, ${}^{96}\text{Cd}$ – numerisch ausgerechnet und im Anhang tabellarisch dargestellt. Das wichtigste Kriterium bei der Ermittlung der Schalenenergien ist, dass ihre Summe die experimentell bekannte Gesamtbindungsenergie ergibt. Bei dieser Prozedur konnten wir aber die Radien der Kernschalen und die Schalenabstände nicht exakt berechnen. Von daher sind unsere Angaben zu Schalenradien R und zu Schalenabständen $\Delta r = r - R_s$ (Abb. 2) stets als Trendbestimmung zu verstehen. Eine exakte Berechnung kann nur durch Lösen der quantenhydrodynamischen Grundgleichungen [6] im Innenraum der Nukleonen erfolgen.

Das Allererste, was uns an den Tabellen im Anhang auffällt, ist die verhältnismäßig hohe Bindungsenergie, die in der ersten Schale der gg-Kerne konzentriert ist:

Nuklid	R_1 [fm]	E_1 [MeV]
${}^8\text{Be}$	3,5123	- 56,4805
${}^{16}\text{O}$	2,4647	- 80,5141
${}^{24}\text{Mg}$	1,7000	- 118,5011
${}^{32}\text{S}$	1,3532	- 151,5412
${}^{40}\text{Ca}$	1,1500	- 182,4450
${}^{48}\text{Cr}$	1,0113	- 209,6230
${}^{56}\text{Ni}$	0,8280	- 263,8511
${}^{64}\text{Ge}$	0,7620	- 290,8420
${}^{96}\text{Cd}$	0,5498	- 431,0106

Verantwortlich für diesen verhältnismäßig hohen Anstieg ist hauptsächlich die tangential wirkende Casimir-Energie $- 203,9448 \text{ MeV fm} / R$ in der Gl. (30). Da die ers-

te Schale jedes Nuklids unter maximalem Druck steht, schrumpft sie am radikalsten, was in der Tabelle oben an den verminderten Schalenradien R_l zum Ausdruck kommt. Erst unterhalb von $R_l = 1 \text{ fm}$ leistet auch die zweite tangential wirkende Casimir-Energie - $50,9862 \text{ MeV fm} (1 - (r/R)^2)/(R(d/R)^3)$ in der Gl. (30) einen nennenswerten Beitrag zur Schalenenergie. Schon beim Übergang zur zweiten Schale wird die Schalenenergie beträchtlich geringer, weil zur Schrumpfung des Radius die erste Schale im Wege steht; dies gilt umso mehr für höhere Schalen, so dass mit zunehmendem Radius ein stark abfallendes Schalenenergiespektrum resultiert. Um zu sehen, wie sich die Schalenenergie in tangentiale und radiale Komponenten aufteilt, geben wir unten exemplarisch das Schalenenergiespektrum des Nuklids ^{96}Cd an:



$$12 E_{Cas}(d) + 8 E_{Cas}(r, R) + 4E_C = E_i [\text{MeV}]$$

1. Schale:	- 451,5083	- 9,7679	+ 30,2656	= - 431,0106
2. Schale:	- 101,6868	- 22,0131	+ 15,1162	= - 108,5837
3. Schale:	- 55,3924	- 20,8931	+ 12,0985	= - 64,1870
4. Schale:	- 33,9606	- 15,9007	+ 10,1687	= - 39,6926
5. Schale:	- 22,5977	- 13,4574	+ 8,5391	= - 27,5160
6. Schale:	- 17,0275	- 14,2032	+ 7,7689	= - 23,4618
7. Schale:	- 13,7458	- 14,0067	+ 7,3997	= - 20,3528
8. Schale:	- 11,4798	- 13,8762	+ 7,1452	= - 18,2108
9. Schale:	- 9,8255	- 13,7839	+ 6,9591	= - 16,6503
10. Schale:	- 8,5673	- 13,7150	+ 6,8171	= - 15,4652
11. Schale:	- 7,5798	- 13,6618	+ 6,7052	= - 14,5364
12. Schale:	- 6,7853	- 13,6194	+ 6,6147	= - 13,7900

Summe:	-740,1568	- 178,8984	+125,5980	= -793,4572

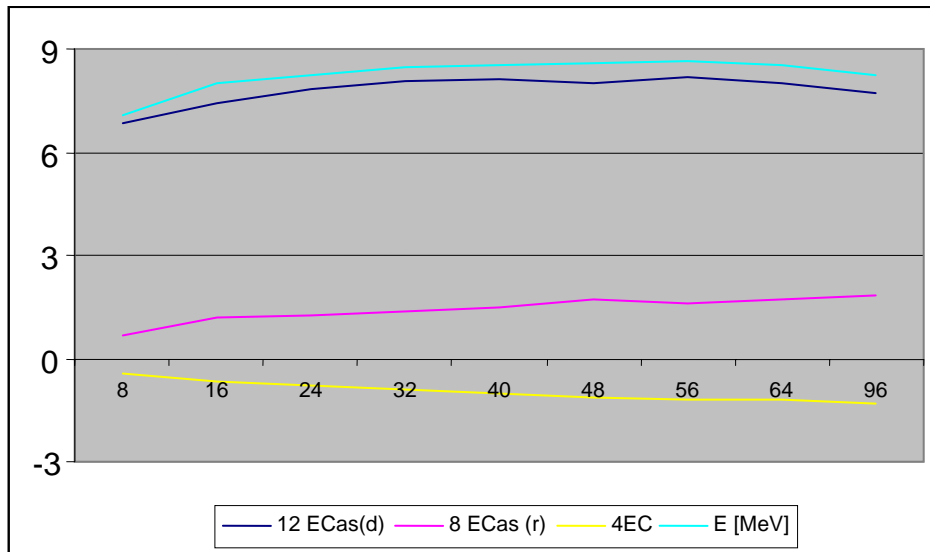
Die Gesamtbindungsenergie des Cadmium-Kerns besteht also fast ausschließlich aus den tangential wirkenden Casimir-Energien in Höhe von - 740,1568 MeV, wobei die

Bindungsenergie der ersten Schale - $451,5083 \text{ MeV}$ beträgt und bis zur zwölften Schale auf - $6,7853 \text{ MeV}$ herunterfällt. Die radial wirkenden Energien in Höhe von $E_r = 8 E_{Cas}(r, R) + 4E_C = -53,3004 \text{ MeV}$ leisten hingegen einen geringeren Beitrag zur Gesamtbindungsenergie, reichen aber mit - $7,0047 \text{ MeV}$ auf der zwölften Schale vollkommen aus, dass der Cadmium-Kern nicht nur auf vorbeiziehende Neutronen, sondern in hinreichender Entfernung auch auf einzelne Protonen besonders attraktiv wirkt.

Um den Beitrag der tangential und radial wirkenden Casimir-Energien zur Gesamtbindungsenergie besser überblicken zu können, dividieren wir die am Ende des Anhangs angegebenen Tabellenwerte für die Gesamtbindungsenergie der Nuklide durch die Massenzahl A und erhalten

die Gesamtbindungsenergie pro Nukleon

Nuklid	- $(12 E_{Cas}(d)/A$	+	$8 E_{Cas}(r, R)/A$	-	$4E_C/A$	=	- $E_B [\text{MeV}]/A$
^8Be	6,8520	+	0,6692	-	0,4612	=	7,0601
^{16}O	7,4562	+	1,1863	-	0,6546	=	7,9879
^{24}Mg	7,8354	+	1,2352	-	0,8107	=	8,2599
^{32}S	8,0414	+	1,3770	-	0,9214	=	8,4970
^{40}Ca	8,1058	+	1,4827	-	1,0381	=	8,5503
^{48}Cr	8,0086	+	1,6915	-	1,1280	=	8,5722
^{56}Ni	8,1907	+	1,6262	-	1,1714	=	8,6455
^{64}Ge	8,0377	+	1,7045	-	1,2133	=	8,5289
^{96}Cd	7,7100	+	1,8635	-	1,3083	=	8,2652



Der Hauptbeitrag zur Gesamtbindungsenergie pro Nukleon wird fast ausschließlich von den tangential wirkenden Casimir-Energien geleistet. Der Beitrag der radial wirkenden Energien bleibt bei den angegebenen gg-Kernen unter $0,57 \text{ MeV}$ pro Nukleon. Auch der Verlauf der Kurve „Gesamtbindungsenergie pro Nukleon“ wird weitgehend von den tangential wirkenden Casimir-Energien bestimmt. Nach einem relativ steilen Anstieg wird das Maximum der Kurve zwischen den Nukliden ^{56}Ni und ^{64}Ge erreicht. Danach fällt die Kurve weniger steil nach Maßgabe der tangential wirkenden Casimir-Energien pro Nukleon bis zu ihrem endgültigen Trend.

Um zu zeigen, wohin der endgültige Trend der tangentialen und radialen Komponente der Schalenenergie führt, haben wir die halbklassische Berechnung des Schalenenergiespektrums des Nuklids ^{96}Cd fortgesetzt und auf der 29. Schale zu einer Abschätzung der Energiewerte von ^{232}Lv gelangt:



29. Schale

$R \text{ [fm]}$	r/R	d/R	$r \text{ [fm]}$	$d \text{ [fm]}$	$E \text{ [MeV]}$
55,5	0,9819319	0,446562	54,4976	24,7842	-9,5866

$$\begin{array}{r}
12 E_{Cas}(d) + 8 E_{Cas}(r, R) + 4E_C = E [MeV] \\
- 0,3694 - 1858,9344 + 6,0853 \\
- 3,6747 + 0,1528 \\
+ 1,7561 + 1845,5533 \\
- 0,1556 \\
\hline
- 2,2880 - 13,3839 + 6,0853 = - 9,5866
\end{array}$$

Wie wir sehen, betragen die tangential wirkenden Casimir-Energien auf der 29. Schale nur noch $- 2,2880 MeV$. Das ist nicht erstaunlich, weil die betreffende Schale nur noch ein extrem dünner Streifen von $\Delta R = R - r = 1,0024 fm$ ist und einen Radius von $R = 55,5 fm$ hat. Das eigentlich Paradoxe an der 29. Schale ist ihre hohe Bindungsenergie von $- 9,5866 MeV$, obwohl ganz allgemein angenommen wird, dass bei hinreichend hohen Kernschalen die abstoßende Coulomb-Kraft die Kernbindungskräfte übertrifft und dadurch der Kern instabil wird. Offenbar kann unser halbklassisches Modell die experimentell gesicherte Instabilität der Kerne bei hinreichend hohen Kernschalen nicht erklären. – Um eine Erklärung für dieses Phänomen zu finden, nehmen wir an, dass mit zunehmender Schalenzahl die Schalenhöhe $\Delta R = R - r$ extrem klein wird und damit die Photonen die betreffende Schale immer mehr durchdringen können. Dadurch fallen die radial wirkenden Casimir-Energien viel schwächer als $- 9,5866 MeV$ aus, so dass die Coulomb-Energie die Summe der tangential und radial wirkenden Casimir-Energien leicht übertreffen kann. – Ob allerdings diese Erklärung stimmt, kann nicht in der vorliegenden Arbeit gezeigt werden, weil wir hier von einem halbklassischen Modell ausgehen und keine näheren Angaben zu Schalenhöhen, -radien und -abständen machen dürfen. Eine adäquate Lösung für dieses Problem kann nur im Rahmen einer quantenhydrodynamischen Behandlung gefunden werden.

5 Schlussfolgerungen

Abschließend lässt sich feststellen, dass die Casimir-Kräfte ausgezeichnet als Kernbindungskräfte eingesetzt werden können. Die Schalen- und die Gesamtbindungsenergie der gg-Kerne lassen sich durch tangential und radial wirkende Casimir-Energien in Übereinstimmung mit dem Experiment berechnen. Der Verlauf der Kurve „Gesamtbindungsenergie pro Nukleon“ lässt sich als Trend der tangential und radial wirkenden Casimir-Energien in allen Einzelheiten deuten. Angesichts dieser Erfolge der Casimir-Kräfte stellt sich die Frage, welches Modell wir in Zukunft bei der Beschreibung der Kernkräfte vorziehen sollten – das Casimir-Kraft-Modell oder das Teilchenaustausch-Modell [7], mit dem die moderne Physik die Kernkräfte beschreibt?

Diese Frage darf nicht voreilig beantwortet werden. Dem Casimir-Kraft-Modell steht nämlich eine entscheidende Prüfung bevor: Im Rahmen der quantenhydrodynamischen Behandlung der Kernkräfte muss sich noch zeigen, dass die Casimir-Kraft auch im Kerninneren die einzig mögliche Kernbindungskraft ist und davon ausgehend die Schalenenergien, -höhen, -radien und -abstände exakt berechnet werden können. Solange dies nicht geschehen ist, darf nicht gesagt werden, dass das Casimir-Kraft-Modell dem Teilchenaustausch-Modell vorzuziehen ist.

Literatur

- [1] *H. B. G. Casimir*, *Physica* 19, 846 (1956).
- [2] *T. H. Boyer*, *Phys. Rev.* 274, 1764 (1968).
- [3] *B. W. Ninham and M. Boström*, *Phys. Rev. A* 67, 030701 (2003).
- [4] *H. Güveniř*, *The General Science Journal*, September 14, 2014,
<http://gsjournal.net/Science-Journals/Essays/View/5687>
- [5] *S. Zaheer, S.J. Rahi, T. Emig and R. L. Jaffe*, arXiv: 1008.4181v2.
- [6] *H. Güveniř*, *The General Science Journal*, February 21, 2014,
<http://gsjournal.net/Science-Journals/Essays/View/5338>
- [7] *R. Fleming*, viXra.org e-Print archive: 1403.0006v1,
<http://vixra.org/pdf/1403.0006v1.pdf>

Anhang

Charakteristische Schalengrößen ausgewählter gg-Kerne

^8Be	R [fm]	r/R	d/R	r [fm]	E [MeV]	E_{Exp} [MeV]
1	3,5123	0,2216	1,13132	0,7783257	-56,4805	-56,4800

^{16}O	R [fm]	r/R	d/R	r [fm]	E [MeV]	E_{Exp} [MeV]
1	2,4647	0,18949	1,0615	0,4670	-80,5141	
2	3,5123	0,7631716	0,889587	3,4343	-47,2919	
					-127,806	-127,619

^{24}Mg	R [fm]	r/R	d/R	r [fm]	E [MeV]	E_{Exp} [MeV]
1	1,7	0,159037	0,986685	0,2704	-118,5011	
2	3,8	0,706706	0,92184	2,6855	-54,7241	
3	9,861	0,706353	1,026513	6,180589	-25,0128	
					-198,238	-198,257

^{32}S	R [fm]	r/R	d/R	r [fm]	E [MeV]	E_{Exp} [MeV]
1	1,3532	0,141983	0,941198	0,1921	-151,5412	
2	3	0,7084214	0,88707	2,1253	-69,3323	
3	6,4	0,7222333	0,97454	4,622293	-32,6253	
4	13	0,742546	1,02233	9,653098	-18,4063	
					-271,9051	-271,7800

^{40}Ca	R [fm]	r/R	d/R	r [fm]	E [MeV]	E_{Exp} [MeV]
1	1,144	0,130237	0,908316	0,1490	182,445	
2	2,81	0,6828807	0,897028	1,9189	-73,5727	
3	5	0,7718783	0,89227	3,8593915	-41,2961	
4	8	0,8067889	0,894865	6,4543112	-26,4059	
5	12,2	0,824045	0,900413	10,053349	-18,2935	
					-342,013	-342,052

^{48}Cr	R [fm]	r/R	d/R	r [fm]	E [MeV]	E_{Exp} [MeV]
1	1,011289	0,122042	0,884601	0,123400	-209,623	
2	2,6	0,672042	0,892947	1,747300	-79,4127	
3	4,5	0,780291	0,870663	3,511310	-45,8371	
4	7	0,815993	0,869867	5,711949	-29,8597	
5	9	0,886797	0,76452	7,981176	-25,1547	
6	11	0,907720	0,726189	9,984924	-21,5785	
					-411,466	-411,466

^{56}Ni	R [fm]	r/R	d/R	r [fm]	E [MeV]	E_{Exp} [MeV]
1	0,828	0,1095260	0,847039	0,0906875	-263,8511	
2	2,5	0,6373103	0,909441	1,5932758	-82,1764	
3	4,4	0,7750956	0,873911	3,4104206	-46,7153	
4	6,65	0,8258649	0,850847	5,4920016	-31,4936	
5	9,09	0,8628401	0,812973	7,8432168	-23,8641	
6	11,6	0,8899495	0,771054	10,323414	-19,5686	
7	14,3	0,9042228	0,745901	12,930386	-16,4803	
					-484,1494	-483,9910

^{64}Ge	R [fm]	r/R	d/R	r [fm]	E [MeV]	E_{Exp} [MeV]
1	0,762	0,1046040	0,831793	0,07970825	-290,842	
2	2,3	0,6370567	0,896195	1,46523041	-89,4595	
3	4	0,7786815	0,858739	3,11472600	-51,2974	
4	5,9	0,8343747	0,827499	4,92281055	-35,4368	
5	8,5	0,8433197	0,842999	7,16821745	-24,8104	
6	11	0,8843180	0,780847	9,72749833	-20,2540	
7	13,5	0,9060661	0,738957	12,2318928	-17,3845	
8	15,7	0,9291536	0,678865	14,5877109	-16,3655	
					-545,850	-545,879

^{96}Cd	R [fm]	r/R	d/R	r [fm]	E [MeV]	E_{Exp} [MeV]
1	0,549800	0,08680800	0,774089	0,0477	-431,0107	
2	1,9	0,61010350	0,880057	1,1592	-108,5837	
3	3,2	0,78867870	0,821204	2,5238	-64,1870	
4	5,1	0,80751160	0,851117	4,1183	-39,6927	
5	7,5	0,83585410	0,845587	6,2689	-27,5160	
6	9,5	0,89291093	0,754174	8,4827	-23,4619	
7	11,5	0,91181577	0,717579	10,4859	-20,3527	
8	13,5	0,92504391	0,686729	12,4881	-18,2108	
9	15,5	0,93481961	0,660319	14,4897	-16,6502	
10	17,5	0,94233888	0,637400	16,4909	-15,4652	
11	19,5	0,94830233	0,617277	18,4919	-14,5365	
12	21,5	0,95314766	0,599430	20,4927	-13,7901	
					-793,4575	-793,3980

Nuklid	$12E_{\text{Cas}}(\text{d})$	$8E_{\text{Cas}}(\text{r})$	$4E_{\text{C}}$	E [MeV]
^8Be	-54,8163	-5,3537	3,6895	-56,4805
^{16}O	-119,298	-18,9805	10,4730	-127,806
^{24}Mg	-188,049	-29,6455	19,4567	-198,238
^{32}S	-257,326	-44,0627	29,4840	-271,905
^{40}Ca	-324,232	-59,307	41,5256	-342,013
^{48}Cr	-384,414	-81,1941	54,1420	-411,466
^{56}Ni	-458,678	-91,0683	65,5965	-484,150
^{64}Ge	-514,411	-109,088	77,6489	-545,850
^{96}Cd	-740,157	-178,898	125,598	-793,458