the general science journal

Etude du Tenseur Energie Impulsion en Mécanique des Fluides

Roman Baudrimont
Chercheur Indépendant
RomanBaudrimont.cd@gmail.com

Abstrat : Ce papier vise à résumer l'implication du tenseur énergie impulsion dans l'étude de la mécanique des fluides. Dans la première partie, nous verrons l'implication que porte le tenseur énergie impulsion dans le cadre de la relativité générale. Dans une seconde partie, nous étudieront le tenseur énergie impulsion dans le cadre de la mécanique des fluides parfaits, qui nous permettra d'aboutir en troisième partie dans le cas de fluides newtoniens, et en dernière partie nous verrons qu'il est possible de définir l'espace-temps comme un fluides non-newtoniens.

Keys word : Fluid Mechanic, Pulse Energy Tensor, General Relativity

Part 1 – Le tenseur énergie-impulsion en relativité générale.

Part A – Le tenseur énergie-impulsion comme tenseur de contrainte.

Le tenseur énergie-impulsion est un tenseur utilisé dans l'équation d'Einstein, permettant de décrire le contenu en matière de l'espace-temps. En effet, il ne décrit que l'énergie et l'impulsion associé à la matière, ou tout autre forme de champ non gravitationnel [1]. Le tenseur énergie-impulsion ne contient pas ainsi toute l'information sur le détail miscroscopique des constituants de la matière. Pour cela, la thermodynamique et la mécanique statistique sont nécessaires.

Dans un cadre général, le vecteur flux d'énergie de la matière est mesuré par l'équation suivante :

$$\vec{p} = p^i \vec{e}_i$$

Où $\vec{e}_i$ est une base orthonormale. Par la même occasion, toujours selon la source [1], nous pouvons alors exprimer le vecteur flux d'énergie de la matière, ainsi que l'énergie par unité de temps :

$$\varphi^i = -cT(\vec{u}_0, \vec{e}_i)$$

$$\frac{dE}{dt} = \vec{\varphi} \cdot \vec{n}\, dS$$

Avec un champ tensoriel noté T, un élément de surface de normal $\vec{n}$ et d'aire dS. Il s'ensuit que l'écriture du tenseur des contraintes est alors :

$$S_{ij} = T(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$$

Le tenseur décrit ci-dessous est la force exercée par la matière dans la direction de $\vec{e}_i$ sur l'unité de surface dont $\vec{e}_j$ est la normale.
En effet, le tenseur des contraintes est un tenseur de pression : il décrit de quel manière la matière exerce une « force » sur une « surface », appelé espace-temps.

Cette interprétation du tenseur énergie impulsion comme un tenseur de contrainte sera très important pour ce qui va suivre ! Avant d'en terminer, notons que nous pouvons écrire ceci :

$$\vec{\varphi} = c^2\vec{p}$$

Cette équation définit une égalité entre le vecteur de flux d'énergie et le vecteur de densité d'impulsion de la matière à facteur c^2 près.

De ce fait, cette équation est en fait une sorte de conséquence mathématique de l'équivalence masse-énergie : ici, il s'agit d'une équivalence entre un flux d'énergie et un vecteur de densité d'impulsion de la matière.

Part B – Le tenseur énergie-impulsion dans l'équation d'Einstein.

La relativité générale [1] est une théorie de la gravitation écrite par Einstein entre 1907 et 1915. Celle-ci stipule que l'attraction gravitationnelle jusqu'alors connue par l'équation de Newton est en fait une déformation de l'espace-temps provoquée par des concentrations d'énergie. Elle est décrite, de façon simplifiée, par cette équation :

$$G_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

Ou, de manière complète, en sachant que :

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} G_{ij} R$$

Nous avons :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} G_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

Il s'agit d'une équation tensorielle. $8\pi G/c\hat{}4$ est une constante, le tenseur T_{ij} est le tenseur d'énergie d'impulsion relativiste (une matrice 4×4) déduite du tenseur des flux de moment (une matrice 3×3). On retrouve le tenseur d'Einstein G_{ij}, ainsi que le tenseur de courbure de Ricci R_{ij} et son scalaire noté R. Enfin, on retrouve le tenseur métrique noté g_{ij}.

Le tenseur T_{ij} peut s'écrire à l'aide du temps propre ε de la relativité restreinte :

$$d\varepsilon = \frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}}{c}$$

On peut alors écrire l'équation suivante, avec ρ une masse volumique :

$$T_{ij} = \rho \frac{dx_i}{d\varepsilon} \frac{dx_j}{d\varepsilon} = \rho c^2 \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds}$$

En le multipliant par le tenseur métrique controvariant, on peut obtenir la densité d'énergie :

$$g^{ij} T_{ij} = g^{ij} \rho c^2 \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} = \rho c^2$$

Il est possible de déduire des équations d'Einstein le principe de moindre action, le premier étant l'action d'Einstein-Hilbert noté S_H, et le second l'action pour la matière, noté S_M :

$$S_H = \int d^4x \sqrt{|g|} R$$

$$S_M = \int d^4x \sqrt{|g|} \mathfrak{L}$$

Avec $\mathfrak{L}$ une densité lagrangienne. On peut alors définir ces deux identités :

$$G_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_H}{\delta g_{ij}}$$

$$T_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ij}}$$

Enfin, le tenseur énergie impulsion respecte le principe de conservation locale d'énergie :

$$\nabla^j T_{ij} = 0$$

Maintenant, analysons davantage le tenseur T_{ij}.
Le tenseur énergie impulsion, sous sa forme matricielle, peut s'écrire ainsi [2] :

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\gamma^2 c^2 & \rho\gamma^2 c v_x & \rho\gamma^2 c v_x & \rho\gamma^2 c v_x \\ \rho\gamma^2 c v_x & \rho\gamma^2 v_x v_x & \rho\gamma^2 v_x v_y & \rho\gamma^2 v_x v_z \\ \rho\gamma^2 c v_x & \rho\gamma^2 v_y v_x & \rho\gamma^2 v_y v_y & \rho\gamma^2 v_y v_z \\ \rho\gamma^2 c v_x & \rho\gamma^2 v_z v_x & \rho\gamma^2 v_z v_y & \rho\gamma^2 v_z v_z \end{bmatrix}$$

Dans ce tenseur, on retrouve :

- La densité d'énergie : T_{00}
- La pression : T_{11}, T_{12}, T_{13}
- Le flux d'énergie : T_{01}, T_{02}, T_{03}
- La densité d'impulsion : T_{10}, T_{20}, T_{30}
- La viscosité : $T_{21}, T_{31}, T_{32}, T_{12}, T_{13}, T_{23}$

Le tenseur énergie impulsion en lui-même n'est pas facile à comprendre. Rappelons d'abord que T_{ij} est le flux de la i composante du quadri-impulsion x_j que nous pouvons noter l'impulsion mu_i et le flux nu_j. Le flux d'impulsion est alors noté :

$$mu_i \cdot nu_j = \rho u_i u_j$$

L'analyse du tenseur énergie impulsion est la suivante.

Dans la première « ligne » de la matrice $T_{00,}T_{01}, T_{02}, T_{03}$.
T_{00} est la densité d'énergie.
T_{01}, T_{02}, T_{03} corresond aux flux d'énergie, comme dit plus haut. Pour être plus précis, il s'agit des flux de la quatrième composante, l'énergie, allant dans 3 directions (direction 1 pour T_{01} par exemple).
Même chose pour l'impulsion : elle possède une densité et un flux allant dans trois directions (T_{10}, T_{20}, T_{30}).

De manière générale, le premier indice indique de quoi on parle (E, p_x, p_y, p_z) et le deuxième indice donne la direction du flux (t, x, y, z).

Remarquons que dans le cas de vitesses faibles, c'est-à-dire avec $\gamma = 1$, nous avons environ :

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \rho c^2 & \rho c v_x & \rho c v_y & \rho c v_z \\ \rho c v_x & \rho v_x v_x & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho c v_y & \rho v_y v_x & \rho v_y v_y & \rho v_y v_z \\ \rho c v_z & \rho v_z v_x & \rho v_z v_y & \rho v_z v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho c^2 & \rho c v_x & \rho c v_y & \rho c v_z \\ \rho c v_x & P_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \rho c v_y & \tau_{yx} & P_{yy} & \tau_{yz} \\ \rho c v_z & \tau_{zx} & \tau_{zy} & P_{zz} \end{bmatrix}$$

Remarquons alors que les $T_{21}, T_{31}, T_{32}, T_{12}, T_{13}, T_{23}$ noté ici par les différents τ correspondent en fait une viscosité de cisaillement.

Part 2 – Le tenseur énergie impulsion en fluide parfait.

Comme je l'ai dit plus haut, le tenseur énergie impulsion d'einstein contient le tenseur des contraintes ou tenseur énergie-impulsion des fluides parfaits, une matrice 3 x 3. Ainsi, nous avons :

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Mais pour cette partie, nous n'étudieront pas ce tenseur. En effet, le tenseur énergie impulsion des fluides parfaits est un tenseur ne prenant pas en compte la viscosité, c'est-à-dire les éléments ci-contre : $T_{21}, T_{31}, T_{32}, T_{12}, T_{13}, T_{23}$. De plus, il ne prend pas en compte le flux d'énergie ni la densité d'impulsion, ce qui nous réduit à la matrice suivante :

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\gamma^2 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho\gamma^2 u_x u_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho\gamma^2 u_y u_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho\gamma^2 u_z u_z \end{bmatrix}$$

Dans ce tenseur, on retrouve :
- La densité d'énergie : T_{00}
- La pression : T_{11}, T_{12}, T_{13}

Au final, le tenseur énergie impulsion devient une matrice diagonale, calculable par sa trace :

$$T_{ij} = \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} \rho\gamma^2 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho\gamma^2 u_x u_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho\gamma^2 u_y u_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho\gamma^2 u_z u_z \end{bmatrix}$$

Et donc, dans le cadre de vitesse faible où $\gamma \approx 1$:

$$T_{ij} = \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho u_x u_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u_y u_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho u_z u_z \end{bmatrix} = \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{zz} \end{bmatrix}$$

Ce tenseur énergie impulsion peut donc s'écrire ainsi [3] :

$$T_{ij} = \left(\frac{P}{c^2} + \rho\right) u_i u_j - P g_{ij}$$

Où P la pression, ρ la masse volumique, $u_i u_j$ un quadrivecteur, et g_{ij} le tenseur métrique. Le cas le plus simple est le cas de matière pure [4], où l'équation se réduit à :

$$T_{ij} = \rho\, u_i u_j$$

Qui n'est autre que le produit de l'impulsion de chaque particule et le flux de chaque particule :

$$T_{ij} = m u_i \cdot n u_j = \rho u_i u_j$$

Revenons-en aux tenseurs énergie impulsion des fluides parfaits. On peut en déduire ces résultats :

$$T_{00} = \left(\frac{P}{c^2} + \rho\right) u_0 u_0 - P g_{00} = \left(\frac{P}{c^2} + \rho\right) c^2 - P = \rho c^2$$

$$T_{0i} = \left(\frac{P}{c^2} + \rho\right) u_0 u_i - P g_{0i} = 0$$

$$T_{i0} = T_{0i} = 0$$

$$T_{ii} = \left(\frac{P}{c^2} + \rho\right) u_i u_i - P g_{ii} = -P(-1) = P$$

$$T_{ij,i\neq j} = 0$$

Ce qui entre en accord avec la matrice écrite plus haut.

Le tenseur énergie impulsion, réduit à un fluide parfait permet de décrire le mouvement de l'univers à de très grandes échelles (échelles stellaires et plus). Il peut être utile dans l'étude de milieu superfluide.

Part 3 – Le tenseur énergie impulsion en fluide newtonien.

Part A – Premier point de départ : L'article de T. Padmanabhan

Cet article [5] pose les bases, à mon humble avis, de la description des équations des champs d'Einstein en équation hydrodynamique de Navier Stockes. Dans cet article, deux moyens permettent d'obtenir cette équation.

La première méthode est d'obtenir l'extrémisation de l'entropie associées aux déformations des surfaces nulles. Ici, nous n'étudieront pas cette partie, car elle ouvre la voie d'une description thermodynamique des équations d'Einstein, qui n'est pas le sujet de cet article.

La seconde méthode, que l'on va expliquer dans cet article, consiste à formuler l'équation de Navier Stockes dans le cadre d'un fluide hypothétique construit sur une normal nul. Je simplifierais les explications, afin de ne pas alourdir l'actuel article et avoir une compréhension rapide et générale de l'apport de T. Padmanabhan dans la construction hydrodynamique des équations des champs d'Einstein.

Il va donc commencer à construire une métrique, de normal l, avec comme coordonnée x^3 qui correspond à un ensemble de surface nulle, avec $x^0 = surface\ constante$, ainsi qu'une surface 2D avec comme coordonnées transversales $x^A(x^1, x^2)$. On obtient la métrique suivante :

$$ds^2 = q_{AB}(dx^A - v^A dt)(dx^B - v^B dt)$$

Celle-ci détermine la géométrique extrinsèque de la surface nulle. Je passe certains détails calculatoires, et il en arrive à écrire ces coefficients (appelé coefficients de Weingarten) :

$$\nabla_\alpha l \equiv X_\alpha^\beta\, \partial_\beta = X_\alpha^\beta \mathrm{e}_\beta \quad ; \quad \nabla_\alpha l^\beta \equiv X_\alpha^\beta$$

Il s'ensuit que les composantes de la matrice 3×3 de X_α^β peuvent être exprimé selon les termes q_{AB} et v^A, permettant d'aboutir aux quantités suivantes :

$$O_{AB} = -l_m \Gamma_{AB}^m \qquad \omega_0 = l^m \Gamma_{m0}^0 \qquad \omega_A = l^m \Gamma_{mA}^0$$

Avec ses variables, il en déduit avec la nouvelle équation de Navier Stockes :

$$(\partial_0 + v^B \partial_\beta)\left(-\frac{\omega_A}{8\pi}\right) = \frac{1}{8\pi}\partial_\beta \sigma_A^B - \frac{1}{16\pi}\partial_A \theta - \partial_A\left(\frac{k}{8\pi}\right) - T_{mA} l^m$$

On retrouve alors $-\omega_A/8\pi$ une densité de mouvement, $k/8\pi$ une pression, $\eta = 1/16\pi$ un coefficient de viscosité de cisaillement (notons d'ailleurs que le tenseur de viscosité peut être écris de la manière suivante : $2\eta\sigma_B^A + \xi\delta_B^A\theta$, avec $\xi = -1/16\pi$ un facteur 2 supplémentaire pour la viscosité en cisaillement) et enfin $T_{mA} l^m$ une force extérieure.

En conclusion, les équations d'Einstein sont identiques aux équations de Navier Stockes lorsque celles-ci sont projetés sur une surface nulle.

Chose importante à préciser : Les termes impliquants les dérivées du tenseur des contraintes visqueuses, la dérivée de la pression et le terme de flux de moment externes sont nuls dans le cadre d'une chute libre car ils impliquent des dérivées du symbole de Christoffel, du fait de la proportionnalité de ces symboles aux contraintes visqueuses et la pression.
En résumé, les observateurs ne constatent aucune dissipation mais la force exercée sur le fluide visqueux ne disparait pas dans le cas d'une chute libre, ce qui implique que cette force a une existence indépendante de l'observateur.

J'aimerai citer la fin de l'article, qui me semble d'une importance capitale : « *La relation entre la thermodynamique des horizons et la dynamique de la gravité a commencé dans les années 70 sous la forme d'une analogie provisoire. Avec les résultats actuels, cela reflète clairement la réalité sous-jacente, à savoir que la gravité est hydrodynamique.* »

Part B – La théorie de Franck Delplace.

Le tenseur énergie impulsion peut être généralisé dans le cadre de fluide newtonien. Pour cela, nous devons nous appuyer sur la mécanique des fluides [6]. L'équation tensoriel d'ordre 2 permettant de définir le comportement mécanique d'un liquide newtonien est le suivant :

$$t_{ij} = \eta \cdot \sigma_{ij}$$

Avec t_{ij} le tenseur des contraintes. η représente la viscosité dynamique en $Pas.s$ et σ_{ij} est le tenseur du taux de cisaillement.

Selon Franck Deplace, le tenseur énergie impulsion n'est autre qu'une généralisation du tenseur des contraintes. Si on cite son livre « Porte Ouverte sur la physique du 21ème siècle » [6], il écrit :

« *Ce n'est pas la masse des corps qui explique leur comportement dans le continuum espace-temps dans lequel nous sommes, mais la contrainte ou pression qu'elles exercent sur ce continuum.* »

De ce fait, il en déduit que [7] :

$$T_{ij} = \eta \cdot \sigma_{ij}$$

En partant de l'équation d'Einstein, il multiplie chaque côté de l'équation par la diffusivité par impulsion noté D_m auquel il obtient finalement du côté gauche le produit de la courbure par diffusivité par impulsion, qui n'est autre qu'un gradient de vitesse :

$$D_m R_{ij} = T_{ij}$$

De là, Franck Delplace écrit qu'il existe une équivalence entre les lois de la relativité générale et la mécanique des fluides newtoniens.

Il en déduit alors une nouvelle constante :

$$K = \frac{8\pi G}{c^4} D_m$$

En sachant qu'en mécanique des fluides la viscosité cinématique noté ν et égal à η/ρ, il en déduit rapidement l'égalité suivante :

$$K = \frac{\eta}{\rho}\frac{8\pi G}{c^4} = \frac{1}{\eta}$$

Pour enfin définir une viscosité relativiste, qui est :

$$\eta = \sqrt{\frac{c^4 \rho}{8\pi G}}$$

Cette viscosité a la propriété d'être extrêmement élevé. Il écrit alors une propriété générale que l'on retrouve dans son livre [6] :

« *Le continuum espace-temps est un liquide visqueux de viscosité dynamique élevé.* »

Toutefois, vient le problème du déplacement dans un photon dans un tel espace-temps. En effet, si la viscosité est élevée, les photons seraient contraints d'être ralentis, ce qui aurait pour effet de créer une dissipation d'énergie.

Franck Delplace détourne ce problème en écrivant cette propriété [6] :

« *Le vide absolu correspond à l'espace-temps quadridimensionnel d'Einstein qui est un liquide de viscosité élevé. Il n'est à lui seul pas sujet à des échanges thermiques de type vibratoire. Il peut subir des changements de phase dans les conditions limites que sont le zéro degré Kelvin et les très hautes températures où apparaissent les plasmas.* »

Le conduisant à émettre l'hypothèse suivante [6] :

« *Un photon serait un fragment d'espace-temps détaché du continuum, extrêmement énergétique parce que correspondant à un état vibratoire important de ce liquide.* »

Dans un autre article [7] écrit en 2016, il précise davantage la formulation de l'équation d'Einstein. Il en vient à écrire cette égalité :

$$G_{ij}\nu = k\sigma_{ij}$$

Cette équation donne un lien entre courbure de Riemann et gradient de vitesse. En effet, σ_{ij} est la partie symétrique du tenseur de gradient de vitesse, qui est aussi appelé tenseur de déformation. De cette égalité, on peut en déduire cette équation :

$$G_{ij}\nu = \frac{8\pi G\nu}{c^4}T_{ij} = k\sigma_{ij}$$

Donnant pour le tenseur énergie impulsion :

$$T_{ij} = \frac{c^4 k}{8\pi G\nu}\sigma_{ij}$$

On remarque aisément que :

$$\eta = \frac{c^4 k}{8\pi G\nu}$$

Ce qui nous emmène à l'égalité suivante :

$$T_{ij} = \eta \cdot \sigma_{ij}$$

On retrouve une égalité entre tenseur des contraintes noté T_{ij} et le taux de tenseur de déformation σ_{ij}. La quantité η représenterait ainsi la viscosité dynamique de la théorie de la relativité générale.

Cette équation le conduit à conclure que le mouvement des planètes dans l'espace-temps courbe d'Einstein est dû à l'existence d'une valeur non nulle de la viscosité dynamique de l'espace-temps.

Part C – La théorie de Stefano Liberati et Luca Maccione.

Stefano Liberati (SISSA) et Luca Maccione (Université de Munich) propose que l'espace-temps soit une structure sous forme de superfluide, basé sur l'espace-temps de la gravité quantique [9]. En effet, il est postulé qu'à l'échelle de Planck, c'est à dire 10^-33cm, l'espace-temps adopte non plus une

structure continue mais discrète, comme s'il était composé d'une multitude "d'atome" ou de "grains élémentaires" assemblés entre eux. Contrairement à la relativité générale qui décrit le comportement de l'espace-temps de manière globale, les modèles à gravité quantiques tentent de décrire la composition de cet espace-temps ; pour Liberati et Maccione, l'espace-temps serait, à l'instar de l'eau qui est composée de molécules d'H2O, un fluide dont les composants sont encore inconnus.

Pour ce faire, ils décrivent d'abord une équation d'onde visqueuses pour les perturbations de vitesses $v^\mu = \nabla^\mu \varphi$ de la forme suivante :

$$\partial_t^2 \varphi_1 = c^2 \nabla^2 \varphi_1 + \frac{4}{3} \nu \partial_t \nabla^2 \varphi_1$$

Je passe les détails calculatoires qui ne sont pas d'une importance capitale pour l'analyse que nous allons y faire.

L'équipe scientifique fait alors la remarque suivante : « *Lors de l'adoption de l'hydrodynamique comme modèle à grande échelle d'un espace émergent, il est assez intéressant de garder dans l'esprit que la dissipation discutée ci-dessus apparaît dans une expansion de gradient comme une correction de premier ordre aux équations des fluides parfaits.* »

L'équation ci-dessus peut être décris par la généralisation de l'équation de Navier Stockes :

$$\partial_t^2 \varphi_1 = c^2 \nabla^2 \varphi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{3} \nu \partial_t \nabla^n \varphi_1$$

Ils estiment (je passe les détails calculatoires) que le taux de perte d'énergie (dissipation d'énergie) peut être alors écrite par la formule :

$$\sigma_2 c^2 \frac{k^3}{M_{Pl}} = 2\omega\Gamma \quad avec \quad \sigma_2 = \frac{4\nu_2 M_{Pl}}{3c} \ et\ \Gamma \approx \frac{\sigma_2 k^2}{2M_{Pl}}$$

Où on retrouve M_{Pl} la masse de Planck, k une énergie, σ le coefficient sans dimension contrôlant l'ampleur de la violation de Lorentz et Γ le taux de perte d'énergie. En calculant σ_2 dans le cadre de photon 80 TeV ultra relativiste issu du Crab Nebula, avec la distance par rapport au Crab Nebula qui est de $D_{crab} = 1{,}9\ kpc$, nous avons :

$$\sigma_2 \leq \frac{2c\hbar}{D_{crab}(80\ TeV)^2} = 1{,}3 \times 10^{-26}$$

Ils remarquent alors que les photons sont produits par diffusion Compton inverse d'électrons et de positrons accélérés et se propageant dans la nébuleuse. Cette contrainte peut être alors la même appliquée pour des leptons, en supposons qu'ils ont la même énergie que les photons produits.

Ils en déduisent ensuite que, pour des neutrinos par exemple, la contrainte est de l'ordre de 2×10^{-27}.

Les chercheurs ont montré ainsi que la viscosité du fluide aurait tendance à rapidement dissiper les photons le long de leur parcours. Or, on peut observer le trajet de photons émis par des corps situés à plusieurs années-lumière.

En conclusion, en écrivant l'hydrodynamique comme un cadre général d'un espace-temps émergeant en dessous de l'énergie de Planck, ils en arrivent aux résultats que les limites obtenues dans l'ordre le plu bas (qu'ils appellent viscosité de l'espace-temps) sont très serrés, les effets dissipatifs allant au-delà de l'échelle de Planck. Enfin, ils ont en conclus que l'espace-temps émergeant devrait être un superfluide.

La modélisation de l'espace-temps en tant que fluide a déjà été théorisée dans le passé, mais les hypothèses proposées ne prenaient en compte que les effets potentiels de la viscosité du fluide sur les photons, c'est à dire les variations de vitesses qu'ils subiraient en fonction de leur énergie. Le modèle de Liberati et Maccione prend en compte tous les autres effets, notamment les effets de dissipation, ce qui rend leur modèle théorique plus complet.

De ce fait, la théorie de Stefano Liberati et Luca Maccione ne peut fonctionner que dans le cadre d'une transformation du tenseur énergie impulsion en tenseur des contraintes des fluides newtoniens.

Part 4 – L'espace-temps, un fluide non-newtonien.

Luis Lehner, Huan Yang et Aaron Zimmerman ont eux aussi commencé à théoriser que l'espace-temps pouvait subir les mêmes turbulences qu'un fluide [10] : en confinant un trou noir dans un espace anti de Sitter, des effets de turbulence sont apparus. De ce fait, la viscosité autour d'un trou noir à rotation rapide est petite qu'autour d'elle, ce qui suggère que la viscosité est influencé par la courbure de l'espace-temps.

Pour commencer, ils ont pris comme point de départ le nombre de Reynold. Celui-ci permet de savoir lorsqu'un fluide devient turbulent, notamment par l'équation suivante :

$$Re = \frac{\rho}{\eta v \lambda}$$

Avec ρ la densité du fluide, η la viscosité du fluide, λ une longueur d'onde et v la vitesse du fluide. Il s'avère que la dualité gravité-fluide indique qu'il existe des perturbations hydrodynamiques relativistes (donné par l'équation d'état $p = \rho/d$). Ce fait serait constatable dans le cas de trous noirs.

Afin de valider ce résultat dans un cadre plus réaliste, les chercheurs ont étudié les trous noirs à rotation ultra-rapide. En effet, la mécanique des fluides appliquée aux trous noirs décrit l'espace-temps autour de tels trous noirs comme très faiblement visqueux, et donc sujet à de plus fortes turbulences.

Je ne détaillerai pas ici les calculs, tout est expliqué dans l'article [10]. Je noterais juste une formule qui me semble importante. Dans le cadre d'un espace 4 dimension avec un trou noir stationnaire défini par sa masse m et son spin a, on obtient la fréquence suivante :

$$\omega_{lmn} \approx \frac{m}{2} - \frac{\delta\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} - i\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}$$

Avec $\sqrt{\varepsilon}$ un taux, l, m, n qui sont respectivement les nombres angulaires, azimutaux et harmoniques, et δ une fonction de l, m, n. Suite à cette formule, ils en déduisent qu'une décroissance des modes quasi-normaux (mode de dissipation d'énergie d'un objet ou d'un champ perturbé) implique une faible viscosité et une augmentation du nombre de Reynolds, donc une turbulence plus élevée.

Ils ont donc ensuite appliqué un modèle de perturbations non-linéaires à ces trous noirs et le résultat de la simulation fut édifiant : l'espace-temps est devenu turbulent, exactement comme dans un fluide soumis à des remous. Si ce résultat n'avait jamais été obtenu auparavant, c'est qu'aucune étude non-linéaire d'un système gravitationnel n'avait été entreprise (car extrêmement complexe), alors que le phénomène de turbulence est par nature non-linéaire. C'est justement dû à cette complexité que je ne détaillerai pas les calculs ici.

Part 5 – Conclusion générale.

Nous avons vu, dans la première partie, que le tenseur énergie impulsion, en relativité générale, n'a que comme seul fonction de définir la densité énergétique des corps qui provoque la courbure de l'espace-temps. Toutefois, nous avons remarqué que le tenseur énergie impulsion utilisé en relativité générale n'était autre qu'une généralisation du tenseur des contraintes utilisés en mécanique des fluides. Ainsi, l'interprétation selon laquelle c'est la pression des corps qui provoque la courbure de l'espace-temps est tout à fait plausible.

Le tenseur énergie impulsion, réduit à un fluide parfait, nous permet de mieux comprendre le tenseur énergie impulsion de la relativité générale : en effet, celui-ci est principalement composé dans sa matrice des termes de pression et densité d'énergie, ce qui confirme notre interprétation selon laquelle c'est la pression des corps qui sont la source de la courbure de l'espace-temps.
L'utilisation du tenseur énergie impulsion à un fluide parfait est pratique lorsqu'il s'agit d'étudier l'infiniment grand, à des niveaux stellaires, galactiques et au-delà. En effet, l'espace-temps se comporte à cette échelle comme un fluide parfait.

Vient l'écriture du tenseur énergie impulsion en fluide newtonien. Dans ce cas, le tenseur énergie impulsion devient un fluide ayant une viscosité.
L'équation qui définit l'évolution d'un fluide newtonien et l'équation de Navier-Stockes. T. Padmanabhan viendra alors modifier les équations de champ d'Einstein en équation Navier Stockes dans le cadre de surface nulle. Il en déduit alors que la gravité est hydrodynamique.
Franck Delplace partira dans le même ordre d'idée. Celui-ci parti de l'idée que le tenseur énergie impulsion n'est autre que le tenseur des contraintes de la mécanique des fluides mais généralisé à la relativité générale. Il en déduit alors qu'il existe une égalité entre le tenseur énergie impulsion la viscosité ainsi que le gradient de vitesse. Il sera le premier à définir, à partir des seules équations de Planck et des bases de la mécanique des fluides et sans utiliser l'équation de Navier Stockes, une équation hydrodynamique, un fluide newtonien, de l'équation d'Einstein.
Enfin, Stefano Liberati et Luca Maccione seront les premiers à constater que l'espace-temps, à l'échelle quantique, serait un superfluide. Cette constatation leur est venue d'une analogie : dans un univers-fluide, les particules voyageraient dans l'espace-temps comme des vagues à la surface de l'eau. De là, ils ont pensé que la relativité générale pouvait être construite à partir de la mécanique des fluides. Dans de tels cas, il doit y avoir dissipation d'énergie et variation de la vitesse. Pour confirmer leurs idées, ils ont pensé que les photons de hautes énergies qui parcourent une grande distence perde une fraction importante de leur énergie. Ainsi, ils ont observé la nébuleuse du Crabe, qui devrait émettre de tels photons. Toutefois, ils n'ont rien observé confirmant leurs théories. C'est alors qu'ils ont déduit que l'espace-temps serait un superfluide.
J'ai classé ces trois théories dans les fluides newtoniens car un fluide newtonien à la propriété d'être indépendant de la contrainte mécanique qu'on lui applique. Autrement dit, la viscosité est une

constante. Ainsi, c'est l'espace-temps et sa propriété visqueuses qui a une conséquence directe sur le mouvement des corps.

Enfin, la description du tenseur énergie impulsion en tant que fluide non newtonien est semblable à de la théorie, décrite par Luis Lehner, Huan Yang et Aaron Zimmerman. Selon cette théorie, lorsque l'on confine un trou noir dans un espace anti de Sitter, on observe des turbulences, celles-ci pouvant être décrite par la mécanique des fluides. Par ailleurs, plus petite est la viscosité, plus grande est la turbulance. Il s'avère qu'au niveau des trous noirs à rotation ultra rapide, la viscosité est très faible. Cette théorie est donc bien une théorie caractérisant l'espace-temps comme un fluid non-newtonien.

Une remarque importante est à faire. Que ce soit dans la théorie Luis Lehner, Huan Yang et Aaron Zimmerman et celle de Stefano Liberati et Luca Maccione, aucune modification n'a été faite sur le tenseur énergie impulsion. Toutefois, le fait que l'espace-temps soit un fluide est directement lié au tenseur énergie impulsion, puisque c'est celui-ci qui influence la courbure de l'espace-temps, et donc la viscosité.

Décrire les équations d'Einstein en tant que fluide est une toute nouveauté dans les sciences, même si cela a déjà été pensé dans les années 70. En étudiant plus en profondeur les liens qui relient mécanique des fluides, la physique et la relativité générale, sans doute découvriront nous enfin la nature de l'espace-temps et de la gravité quantique.

Part 6 – Bibliographie.

[1] Eric Gourgoulhon (2013-2014), *Relativité générale*, CNRS, Observatoire de Paris

[2] Science.ch (2017), *50. Relativité générale*, Cosmologie

[3] Richard Taillet (2013), *Equation d'Einstein*, Podcast de l'université de Grenoble, Relativité générale, épisode 11

[4] André Lichnebrowicz (1966), *Etude mathématique des fluides thermodynamiques relativistes*, collège de France, Commun. Math. Phys. 1, 328-373

[5] T. Padmanabhan (2011), *The Hydrodynamics of Atoms of Spacetime : Gravitational Field Equation is Navier-Stockes Equation*, International Journal of Modern Physics, ArXiv:1012.0119v1

[6] Franck Delplace (2009), *Porte ouverte sur la physique du 21ème siècle,* éditeur Franck Delplace

[7] Franck Delplace (2014), *Liquid Spacetime (Aether) Viscosity, a way to Uniy Physics*, gs.journal

[8] Franck Delplace (2016), *Reynolds Number and Spacetime Curvature*, Fluid Mechanics Open Access, DOI:10.4172/fmoa.1000125

[9] Stefano Liberati (SISSA) and Luca Maccione (2010), *Astrophysical Constraints on Planck Scale Dissipative Phenomena,* Physical Review Letters, ArXiv:1309.7296

[10] Luis Lehner, Huan Yang et Aaron Zimmerman (2014), *Turbulent Black Holes*, arXiv 1402.4859v2