

## **Evolution du plan complexe vers le système de coordonnées du Quaternion jusqu'à la géométrie trispatiale**

André Michaud

Service de Recherche Pédagogique

→ [Click here for English version](#)

→ [Haga clic aquí para versión en español](#)

→ [Hier anklicken für die Deutsche Fassung](#)

**Résumé:** L'objet de cet article est une analyse comparative des caractéristiques géométriques de l'ensemble des vecteurs unitaires 2D du plan complexe tels qu'ils sont utilisés en Mécanique Quantique et dans le traitement des circuits électriques LC, de l'ensemble 3D des vecteurs unitaires de l'hypersphère de Hamilton tels qu'ils sont utilisés en théorie quantique et enfin de l'ensemble des vecteurs unitaires 3x3D de la géométrie trispatiale tels qu'ils sont utilisés en mécanique électromagnétique. Analyse des implications de l'extension de l'utilisation du système de coordonnées de l'hypersphère au traitement des circuits LC et au système de coordonnées cartésiennes 3D traditionnel, et des conséquences de l'utilisation d'une propriété unique du produit vectoriel croisé des vecteurs unitaires complexes du quaternion d'inverser la direction d'application du vecteur unitaire réel résultant, dans le développement de la mécanique électromagnétique au moyen de la géométrie trispatiale. Seront résumées ensuite les principales questions fondamentales de mécanique électromagnétique que l'utilisation du produit vectoriel croisé du quaternion dans la géométrie trispatiale a permis de résoudre, la première étant l'identification des propriétés que l'énergie fondamentale doit avoir pour obéir aux conditions identifiées par Louis de Broglie pour que les photons électromagnétiques localisés obéissent aux équations de Maxwell. Et finalement, présentation des principaux processus mécaniques complémentaires qui furent développés suite à la prise en compte de ces propriétés de la substance énergie et de cette propriété spéciale du produit vectoriel croisé du quaternion pour expliquer la cause des fréquences électromagnétiques, la relation entre le spin de l'électron et son aspect magnétique, le découplage de photons électromagnétiques sans masse en paires électron-positon massifs, l'existence des charges électriques invariantes de l'électron et du positon et des charges fractionnaires des sous-composants internes collisionnables des protons et des neutrons, la stabilité du proton et l'instabilité du neutron isolé, etc..

**Mots clés:** Le plan complexe; la Théorie quantique; Les quaternions; la géométrie trispatiale; la mécanique électromagnétique.

Cet article a été publié dans le journal d'ingénierie IJERD en mars 2024:

Michaud, A. (2024) *Evolution From the Complex Plane to the Quaternion Coordinate System to the Trispatial Geometry*. International Journal of Engineering Research and Development e-ISSN: 2278-067X, p-ISSN: 2278-800X. March 2024. Volume 20, Issue 3. pp. 108-130.

<http://www.ijerd.com/paper/vol20-issue3/2003108130.pdf>

### **Autres articles dans le même projet:**

[INDEX –Mécanique électromagnétique \(Le modèle des 3 espaces\)](#)

En voici la traduction française:

## 1. Introduction

Des expériences récentes ont clairement démontré que l'utilisation de nombres complexes dans les équations de la théorie quantique est essentielle pour rendre compte correctement des résultats de ces expériences et que la restriction des calculs aux seuls nombres réels ne permettrait pas de prédire avec autant de précision les résultats de ces expériences, comme l'indique un article récent de *Physics World Research Update* [1] [2] [3].

Mais étant donné que l'ensemble des *nombres réels* représenté par  $a$  est un sous-ensemble des *nombres complexes*  $a + ib$  – dans lequel  $i = \sqrt{-1}$  et  $a$  et  $b$  sont des nombres réels – et que la relation entre la partie réelle  $a$  et la partie complexe  $ib$  est de nature géométrique sur le *plan complexe*, qui ne semble pas appartenir à l'espace normal tel qu'il est traditionnellement représenté par le système de coordonnées cartésiennes 3D ( $x, y, z$ ), mais qui est néanmoins compris comme étant perpendiculaire à un axe des réels perpendiculaire à l'axe des  $x$  du système de coordonnées cartésiennes, un examen plus approfondi de l'aspect géométrique de cette relation semble s'imposer.

C'est Caspar Wessel qui a identifié en 1797 la propriété de perpendicularité du plan complexe par rapport à l'axe des nombres réels, lorsqu'il comprit qu'un segment de droite dirigé partant du point zéro de l'axe des réels, correspondant à  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  et formant un angle  $\theta$  par son rapport à l'axe des réels, pouvait également être utilisé pour représenter un *nombre complexe*.

Cela signifie que puisque  $r \angle \theta = a + ib$ , ce qui implique que lorsque  $a$  est mis à 0 le long de l'axe des réels et  $b$  est mis à 1, alors  $i = \sqrt{-1} = r \angle 90^\circ = 1 \angle 90^\circ$  devient *par structure* un *vecteur unitaire* de magnitude 1 pivoté de  $90^\circ$  par rapport à l'axe réel le long d'un axe imaginaire exactement perpendiculaire à l'axe réel, ce dernier considéré comme parallèle à l'axe des  $x$  du système de coordonnées cartésiennes, mais qui n'est ni l'axe des  $y$  ni l'axe des  $z$  de ce système de coordonnées, même si cet axe imaginaire est souvent représenté comme coïncidant avec l'axe  $y$  cartésien pour des raisons de commodité de représentation graphique. Voir plus loin les **Figures 1** et **2** et pour en savoir plus sur le raisonnement de Wessel pour définir cette orientation géométrique de  $i$  par rapport à l'axe réel, tel que mis en perspective à la Ré la référence [4].

Il convient également de noter que les *nombres hypercomplexes*  $a + ib + jc + kd$  définis par Hamilton, dans lesquels  $j$  et  $k$  sont également égaux à  $\sqrt{-1}$  – et qui peuvent également être définis comme étant des vecteurs unitaires *par structure*, tout comme  $i$  – ont été largement associées à la théorie quantique du point de vue *algébrique* par de nombreux chercheurs, par exemple [5] [6], ainsi qu'à la théorie électromagnétique [7] [8], mais pas du point de vue *géométrique* qui sera abordé ici..

Un autre domaine qui utilise également les *nombres complexes* est l'analyse des circuits électroniques à fonctionnement sinusoïdal, impliquant généralement des systèmes RLC ou LC composés de bobines de fil et de condensateurs – R représentant la *résistance*, L l'*inductance magnétique* et C la *capacitance électrique* – dont les caractéristiques établissent les fréquences de signaux requises dans ces circuits [9].

Une note intéressante à ce stade de la mise en situation concernant les systèmes LC est qu'une telle relation électromagnétique peut également être liée au photon

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatiale

électromagnétique à double particule de de Broglie lorsque le *courant de déplacement* de Maxwell est appliqué dans l'établissement de leur structure électromagnétique interne alors qu'ils se propagent dans le vide au niveau subatomique [10] [11], dans lequel la constante de permittivité du vide  $\epsilon_0$  est en réalité une mesure de *capacitance électrique transversale par mètre* – également symbolisée par C dans la théorie électromagnétique. De son côté, la constante de perméabilité du vide  $\mu_0$  est une mesure d'*inductance magnétique transversale par mètre* – également symbolisée par L dans la théorie électromagnétique [12].

Il convient également de noter que les nombres hypercomplexes n'ont apparemment jamais été associés aux systèmes LRC ou LC du point de vue géométrique non plus, malgré l'implication évidente des nombres complexes dans leurs équations. Nous verrons plus loin que les nombres hypercomplexes peuvent être impliqués géométriquement dans les systèmes LRC et LC, bien que de manière potentiellement inattendue.

En résumé, à la lumière des résultats des expériences [1] et [2], il peut être affirmé que *quelque chose* dans les équations de la mécanique quantique et des systèmes RLC et LC est *perpendiculaire par structure à quelque chose d'autre* d'une manière qui ne peut être ignorée sans perdre la précision révélée par les expériences, qui confirment la nécessité d'utiliser des nombres complexes dans leurs équations. Nous explorerons dans cet article ce que ces *quelques choses* pourraient être.

Finalement, nous examinerons la relation entre la géométrie trispatiale qui sous-tend la mécanique électromagnétique des particules élémentaires [13] [14] et ces relations géométriques complexes lorsque l'ensemble standard des vecteurs unitaires  $i=j=k=1$  *par définition* est remplacé par l'ensemble des vecteurs unitaires complexes *par structure*  $i=j=k=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  dans le système de coordonnées cartésien 3D et dans le système de coordonnées de la géométrie trispatiale.

## 2. Perspective historique

Examinons tout d'abord comment le concept d'*onde pilote* de de Broglie – qu'il a initialement nommé *onde de phase* dans sa thèse de 1924 [15] [16] – et l'introduction des nombres complexes par Schrödinger dans son équation d'onde [17], ont fait évoluer la perception traditionnelle de l'électron en mécanique classique du début du 20e siècle, comme étant possiblement un très petit corps rigide localisé avec une masse au repos fixe se déplaçant sur une trajectoire précise et fermée dans l'atome d'hydrogène, vers un état de localisation et de mouvement beaucoup moins clairement défini.

Voici la citation de la comparaison métaphorique qu'il proposait dans sa thèse de 1924 pour illustrer ce mouvement de l'électron tel qu'il le visualisait dans le modèle idéalisé de Bohr de l'atome d'hydrogène :

*"La notion d'onde de phase va nous permettre de fournir une explication de la condition d'Einstein. Il résulte des considérations du chapitre II que la trajectoire du mobile est un des rayons de son onde de phase, celle-ci doit courir le long de la trajectoire avec une fréquence constante (puisque l'énergie totale est constante) et une vitesse variable dont nous avons appris à*

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatiale

calculer la valeur. La propagation est donc analogue à celle d'une onde liquide dans un canal fermé sur lui-même et de profondeur variable. Il est physiquement évident que, pour avoir un régime stable, la longueur du canal doit être en résonance avec l'onde ; autrement dit, les portions d'onde qui se suivent à une vitesse égale à un multiple entier de la longueur  $l$  du canal et qui se trouvent par suite au même point de celui-ci, doivent être en phase. La condition de résonance est  $l = n\lambda$  si la longueur d'onde est constant et  $\oint (v/V) dl = n$  (entier) dans le cas général."

Louis de Broglie (1924) ([15], p. 65)

Il proposa ensuite l'équation suivante de mécanique cinématique qui déclencha le développement de la mécanique ondulatoire, bientôt suivie par la mécanique quantique ([15], p. 65) ([16], p. 52) :

$$m_0 \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R m_0 v = n h \quad (1)$$

Voir la **Section 6** des Références [13] [14] pour une analyse complète de cette équation apparemment banale qui a tellement révolutionné la physique fondamentale suite à sa conversion par Erwin Schrödinger sous forme d'une équation vectorielle de mécanique ondulatoire:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t) \quad (2)$$

L'Équation (2) de Schrödinger génère exactement la même séquence de niveaux d'énergie de momentum quantifiée liée à la séquence des nombres entiers que l'Équation (1) de de Broglie, mais elle est maintenant calculée du point de vue d'une oscillation d'onde plutôt que du point de vue cinématique de la mécanique classique utilisé par de Broglie de la masse d'un électron localisé oscillant radialement de part et d'autre de la trajectoire circulaire idéalisée de l'état fondamental du modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène.

La trajectoire circulaire de l'état fondamental de l'atome de Bohr est qualifiée d'*idéalisée* parce que son établissement théorique autour du proton central était initialement supposée être suivie par un électron localisé considéré comme massif dans le sens traditionnel de la mécanique classique, mais que de Broglie avait récemment compris comme devant être captif d'un état de résonance radiale en oscillation stable autour de cette orbite circulaire pour que la séquence de fréquences liée aux nombres entiers observée dans le spectre de l'atome d'hydrogène puisse être expliquée.

Les *orbites* métastables plus éloignées de l'atome de Bohr vers lesquelles l'électron était supposé sauter lorsqu'il était énergisé loin de l'*orbite* de l'état fondamental pouvaient alors être expliquées comme étant des multiples de résonance de la longueur de l'*orbite* de l'état fondamental, expliquant directement tout le spectre des fréquences énergétiques émises par l'atome d'hydrogène lorsque l'électron retourne à l'état fondamental à partir de cette série de distances métastables, correspondant à la série de Lyman.

La principale différence entre l'Équation (1) et l'Équation (2) est l'introduction par

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatale

Schrödinger de *nombres complexes* dans l'Équation (2), qui implique une relation structurelle perpendiculaire entre certains éléments de l'Équation (2) de la mécanique ondulatoire, qui est absente de l'équation (1) de la mécanique classique utilisée par de Broglie.

Examinons maintenant quels éléments de la conclusion de de Broglie sur l'oscillation radiale de l'électron autour de l'orbite circulaire idéalisée de l'état fondamental du modèle de Bohr Schrödinger a dû percevoir comme étant perpendiculaires l'un à l'autre, au point d'être représentables par des *nombres complexes*.

D'après sa propre conclusion, de Broglie a manifestement perçu l'oscillation de l'électron le long de sa trajectoire comme impliquant une impulsion longitudinale – son *onde de phase* citée ci-dessus, qu'il a également nommée *onde pilote* – qui propulserait l'électron, ce qui entraînerait une oscillation transversale stable de l'électron, similaire à la masse linéique d'une corde élastique en mécanique classique qui se balance transversalement de haut en bas pendant que l'impulsion initiale progresse longitudinalement le long de la corde [12].

Cette seule observation a totalement justifié l'introduction par Schrödinger de la condition complexe  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ , dans son Équation (2) représentant la masse au repos de l'électron sous forme d'une *représentation diffuse faiblement localisable de sa probabilité de présence* [Voir Équation (4)], entraînée dans un mouvement dynamique transversal, en adaptant la fonction d'onde de l'Équation (3) pour particules libres, dans laquelle  $i$  établit que ce mouvement de l'électron, dont le centre-de-présence est représenté par le point P dans la **Figure 1**, doit maintenant osciller par structure perpendiculairement à la trajectoire de Bohr dans l'Équation (1) de Broglie; l'orbite de Bohr idéalisée à l'état fondamental devenant conceptuellement un axe des x circulaire du plan complexe, le long duquel l'électron oscillerait cycliquement de l'extérieur à l'intérieur de l'orbite de Bohr en mode stationnaire.

$$\Psi(\vec{r}, t) = \cos(k\vec{r} - \omega t) + i \sin(k\vec{r} - \omega t) \quad (3)$$

Mais vu que le *plan complexe* n'est pas limité conceptuellement à être établi strictement sur le même plan que la trajectoire circulaire de l'état fondamental, mais peut avoir n'importe quelle orientation angulaire transversale autour de cette trajectoire, l'Équation (2) définit également un volume cylindrique autour de la trajectoire de l'état fondamental lié à l'amplitude  $i \sin(kx - \omega t)$  de l'*onde de phase*, un volume à l'intérieur duquel l'électron est susceptible de se trouver en tout point de l'espace à n'importe quel moment à l'intérieur de ce volume, comme cela est mis en perspective dans les Références [18] [19], et dans lequel la méthode statistique d'Heisenberg pourrait être directement cartographiée. L'incertitude qui en résulte quant à la position instantanée de l'électron à l'intérieur de ce volume à tout moment est probablement à l'origine du *Principe d'incertitude* énoncé par Heisenberg.

C'est pourquoi il a été suggéré en 2013 dans la Référence [20] de restreindre l'étendue probabiliste des emplacements possibles de l'électron en mouvement dans l'état fondamental de l'atome d'hydrogène isolé aux limites de ce volume cylindrique au lieu de l'étendre à  $+$  et  $- \infty$ , pour tenir compte des limites imposées par l'inertie de l'électron pendant ses séquences d'accélération et de décélération transversales lorsqu'il oscille autour du rayon moyen de Bohr, l'ensemble des emplacements les plus probables se

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatale

ramenant à la moyenne au rayon de Bohr :

$$\int_r^R |\Psi_{(x,t)}|^2 dVdt = 1 \quad (4)$$

Bien entendu, en raison des interactions avec la matière environnante, ce volume cylindrique est susceptible en réalité de s'étendre à la limite à un volume 3D circonscrit par les surfaces de deux sphères concentriques dont les rayons intérieur et extérieur seront respectivement  $r$  et  $R$  de part et d'autre du rayon de Bohr. C'est donc exclusivement à ce volume, représenté par le produit de sa fonction complexe avec son conjugué  $\Psi^*\Psi$  dans l'Équation (4), que devrait s'appliquer la condition de normalisation, toute autre localisation dans l'espace devenant physiquement impossible pour l'électron dans l'état fondamental de l'atome d'hydrogène en raison de son inertie.

Tel que mentionné précédemment, Schrödinger a donc introduit dans son équation une caractéristique qui n'avait jamais été liée auparavant au mouvement des corps massifs, soit une relation perpendiculaire entre le mouvement transversal local de la masse de l'électron sur sa trajectoire supposée dans l'atome de Bohr et la direction de mouvement de l'énergie de l'onde de phase qui la transporte. Cette relation perpendiculaire est introduite à l'aide du symbole  $i$ , nommé *unité imaginaire*, égal à  $\sqrt{-1}$  – soit en fait un *vecteur unitaire* défini comme  $1 \angle 90^\circ$  par rapport à l'axe réel du plan complexe, tel que défini par Vessel, tel qu'expliqué plus loin – qui, lorsqu'il est élevé au carré ( $i^2$ ), se résout en  $-1$ , ce qui inverse la direction d'application du vecteur correspondant, qui inverse le sens d'application du vecteur correspondant, ce qui est un avantage supplémentaire de l'utilisation de  $i$  dans les équations vectorielles..

Tel que mentionné précédemment, les nombres complexes peuvent toujours s'écrire sous la forme :

$$z = a + bi \quad (5)$$

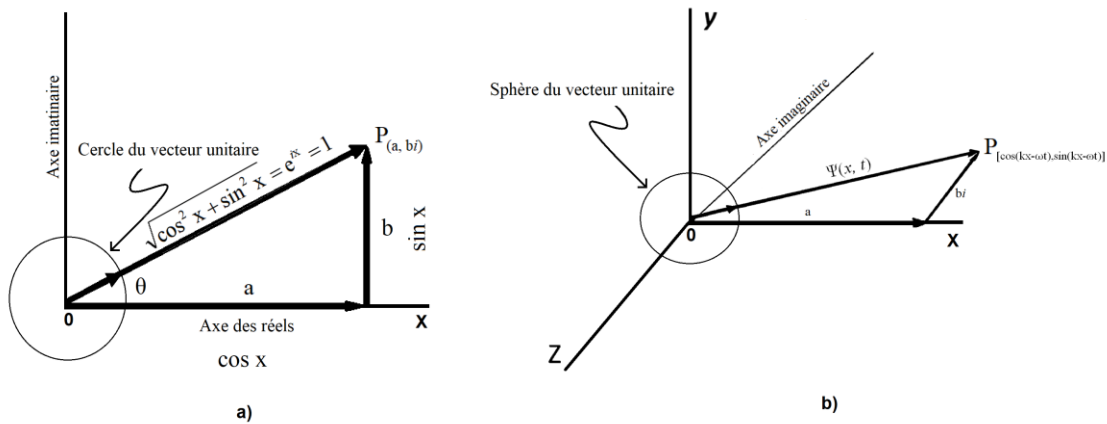
Cela signifie que pour localiser un point  $\mathbf{P}$  dans le système de coordonnées 2D du plan complexe, un premier déplacement est nécessaire vers la droite d'une distance  $a$ , mesurée en nombres réels à partir de l'origine d'un axe horizontal (**Figure 1a**), et que  $i$  révèle qu'un second déplacement d'une distance  $b$ , également mesurée en nombres réels, doit être effectué à *angle droit* à partir de l'extrémité la plus à droite du segment de droite  $a$ , ce qui conduira à un emplacement situé en dehors du volume d'espace normal représenté par le système de coordonnées 3D cartésien, où le point  $\mathbf{P}$  sera localisé.

Notre objectif ici cependant n'est pas d'analyser plus en profondeur l'équation de Schrödinger, qui est expliquée en détail dans de nombreux manuels, tels que l'excellent ouvrage de Référence [21], mais d'explorer plus avant la propriété très particulière de  $i = \sqrt{-1}$  d'agir comme un *opérateur de rotation géométrique statique* de toute représentation vectorielle de toute quantité ayant une magnitude et une direction d'application par rapport à l'origine  $O$  du plan complexe 2D, telles que force, pression, vitesse, etc.

La conséquence de cette nouvelle représentation ondulatoire de l'électron introduite par Schrödinger est que sa présence dans l'atome d'hydrogène a commencé à être perçue comme impliquant des *orbitales étalées*, dont les orbites circulaires idéalisées du modèle

## *Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatale*

de Bohr représentent l'ensemble des distances moyennes par rapport au proton auxquelles chaque volume de résonance est établi avec l'Équation (2).



**Figure 1:** Axes réel et imaginaire du plan complexe.

Il s'avère maintenant que de Broglie avait raison d'émettre l'hypothèse qu'une sorte d'onde d'énergie porteuse, qu'il a d'abord nommée *onde de phase*, puis *onde pilote*, propulsait et guidait la masse au repos de l'électron, et que Schrödinger avait raison de conclure que l'énergie de *momentum* qu'il reliait à cette *onde pilote* agissait perpendiculairement à l'énergie dont la masse au repos de l'électron était faite, mais d'une manière qui n'est devenue claire que beaucoup plus tard, comme nous le verrons plus loin, selon les conditions que de Broglie a lui-même identifiées en 1937 [22] pour que cette *énergie porteuse* obéisse aux équations de Maxwell, et selon une géométrie de l'espace qui devait – selon lui – s'étendre au-delà du cadre de l'espace-temps continu 4D :

*"... la non-individualité des particules, le principe d'exclusion et l'énergie d'échange sont trois mystères intimement reliés : ils se rattachent tous trois à l'impossibilité de représenter exactement les entités physiques élémentaires dans le cadre de l'espace continu à trois dimensions (ou plus généralement de l'espace-temps continu à quatre dimensions). Peut-être un jour, en nous évadant hors de ce cadre, parviendrons-nous à mieux pénétrer le sens, encore bien obscur aujourd'hui, de ces grands principes directeurs de la nouvelle physique."*

Louis de Broglie 1937 ([22], p. 273)

Cette géométrie de l'espace étendue envisagée par de Broglie a été présentée au Congrès-2000 en juillet 2000 [23], et une découverte faite par Paul Marmet en 2003 [24] [25] sur le champ magnétique de l'électron en accélération a permis de comprendre que l'onde pilote de de Broglie avait exactement la même structure électromagnétique interne que le photon à double-particule dont il avait identifiées les conditions d'établissement en 1937, et dont l'équation a été formellement publiée en 2016 [10] [11], expliquant la relation entre le *photon-porteur* d'électron et le photon électromagnétique à double-particule en mouvement libre que de Broglie avait supposé en 1937, après avoir été établi comme étant le *photon-porteur* d'électron en 2013 [26].

En allant encore plus loin que la courbure déjà audacieuse en cercle fermé de l'axe réel



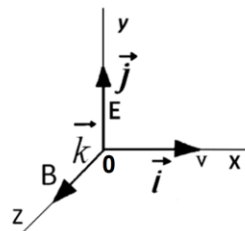
## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatiale

du *plan complexe* traditionnellement perçu comme rectilinéaire illustré par la **Figure 1**, telle qu'introduite par Schrödinger, nous verrons plus loin comment la géométrie trispatiale permet de localiser cet axe au centre-de-présence de l'énergie de la masse au repos de l'électron, ce qui a permis de faire tourner la direction d'application de son énergie de *momentum* directement vers le proton, au lieu d'être orientée le long de la trajectoire circulaire idéalisée de l'état fondamental de Bohr telle qu'elle était comprise au début du 20<sup>ème</sup> siècle, tel qu'établi par la force de rappel de Coulomb en action attractive entre l'électron chargé négativement et le proton chargé positivement, qui agit en contre-pression contre la répulsion magnétique mutuelle permanente entre l'électron et le proton en raison de leur alignement de spin magnétique parallèle par défaut [18] [19], comme le confirme l'expérience fondamentale qui sous-tend le développement de la géométrie trispatiale [26] et qui explique la stabilité de l'atome d'hydrogène, et d'expliquer mécaniquement pourquoi l'électron n'a même pas besoin d'être en orbite autour du proton pour se stabiliser à la distance moyenne du rayon de Bohr connue par rapport au proton, tel qu'analysé aux Références [18] [19].

Nous examinerons plus loin cette géométrie spatiale étendue, mais mettons d'abord complètement en perspective ce qui a été établi en ce qui concerne les *nombre complexes*, le *plan complexe*, les *nombre hypercomplexes* et la structure des *quaternions*, avant d'examiner le deuxième domaine dans lequel les *nombre complexes* et le *plan complexe* ont trouvé une application pratique, soit celui des systèmes RLC et LC, afin de déterminer s'ils rendent compte aussi complètement qu'attendu de ces processus électromagnétiques bien connus qu'ils le font pour l'équation de Schrödinger.

### 3. Le plan complexe

Dans le système de coordonnées cartésiennes 3D standard de la mécanique classique, les symboles de notation  $i$ ,  $j$  et  $k$  sont utilisés pour désigner l'ensemble de *vecteurs unitaires* triplement orthogonaux avec valeurs  $i=j=k=1$ , liés aux axes des  $x$ , des  $y$  et des  $z$  du système de coordonnées 3D standard illustré avec la **Figure 2**, ce qui peut entraîner une certaine confusion quant à leur utilisation alors qu'ils représentent d'autres quantités dans différents contextes mathématiques; contextes qui suffisent généralement à établir leur signification locale, en particulier dans le cas des symboles  $i$  et  $j$  qui, dans des contextes différents, peuvent tous les deux être définis avec la valeur  $i=j=\sqrt{-1}$ ,  $i$  et  $j$  ne coïncidant même pas avec l'axe géométrique des  $x$  de la **Figure 2**.



**Figure 2:** Les trois axes perpendiculaires du système de coordonnées cartésiennes qui permettent de localiser tout point  $(x, y, z)$  dans l'espace par rapport à l'emplacement  $\mathbf{0}$  localisé au *centre-de-présence* de tout corps ou particule dans l'espace normal.

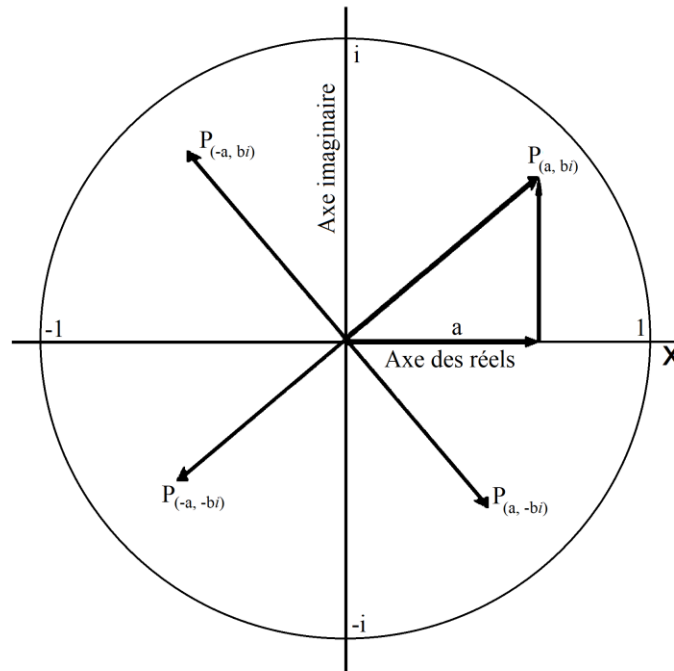
L'ensemble des symboles  $i=j=k=1$  est traditionnellement utilisé pour identifier



### Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatale

l'ensemble des *vecteurs unitaires* liés au système de coordonnées cartésiennes. Cependant, ils sont également utilisés avec une définition différente  $i=j=k=\sqrt{-1}$  en tant que *vecteurs unitaires complexes* associés aux *nombres complexes* et *hypercomplexes*.

Les *nombres complexes* sont utilisés en mécanique quantique, comme nous venons de le voir, et aussi largement dans le domaine électrique, et notamment dans l'ensemble des équations relatives à l'*inductance*  $L$  et à la *capacitance*  $C$  que nous allons étudier ici ; dans lesquelles  $j=\sqrt{-1}$  remplace  $i=\sqrt{-1}$  pour éviter toute confusion avec le symbole du courant qui est également symbolisé par  $i$ . Nous verrons plus loin comment les coordonnées des vecteurs unitaires du quaternion  $i=j=k=\sqrt{-1}$  peuvent également être reliées à l'*inductance* et à la *capacitance*, soit un exercice qui ne semble pas avoir été tenté auparavant, malgré l'avantage qui en résulterait de relier correctement l'énergie impliquée dans l'oscillation LC à une relation électromagnétique perpendiculaire entre le champ  $\mathbf{E}$  lié à la phase C et le champ  $\mathbf{B}$  lié à la phase L de l'oscillation LC au lieu de la seule relation à  $180^\circ$  qu'il est possible de leur assigner dans le *plan complexe* actuellement utilisé tel qu'illustré avec la **Figure 3**, même s'ils peuvent tous deux être représentés comme étant correctement décalés de  $90^\circ$  par rapport à l'axe réel.



**Figure 3:** Le cercle vectoriel unitaire du plan complexe.

Comme le montre également la **Figure 2**, les relations électromagnétiques triplement perpendiculaires  $\mathbf{E}/\mathbf{B}=\mathbf{c}$  et  $\mathbf{E}/\mathbf{B}=\mathbf{v}$  sont également mises en correspondance dans le même système de coordonnées cartésiennes 3D pour illustrer le fait que le produit vectoriel croisé d'un champ  $\mathbf{E}$  avec un champ  $\mathbf{B}$  mutuellement perpendiculaires résulte en un vecteur vitesse perpendiculaire à la fois au champ  $\mathbf{E}$  et au champ  $\mathbf{B}$ , l'axe des x étant considéré comme l'axe le long duquel le mouvement de l'énergie électromagnétique correspondante s'établit.

Le centre du système de coordonnées – soit la position  $\mathbf{0}$  des trois axes – peut être

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatale

situé au *centre-de-présence* de n'importe quel objet, vers lequel ou à partir duquel des vecteurs peuvent pointer.

Ce qui est particulièrement intrigant à propos du *vecteur unitaire*  $i=\sqrt{-1}$  utilisé dans le *plan complexe*, c'est que bien que son origine coïncide avec le centre du système de coordonnées cartésiennes 3D, le vecteur lui-même ne pointe pas vers un endroit quelconque (x, y, z) qui serait situé dans l'espace 3D qui nous est familier, mais pointe plutôt vers un endroit sur un plan 2D (x,  $i$ ) qui est perpendiculaire à ce système de coordonnées, le long d'un soi-disant *axe imaginaire*, un plan qui a été nommé le *plan complexe* pour cette raison, et qui est typiquement représenté par la **Figure 1a**.

Pour illustrer plus visuellement l'orientation de ce *plan complexe* et son axe imaginaire par rapport à l'axe x du système de coordonnées standard, et par la même occasion par rapport aux deux autres axes, la **Figure 1b** fait pivoter la représentation de la **Figure 1a** de  $90^\circ$  autour de l'axe x pour montrer qu'elle est orientée dans une quatrième direction perpendiculaire aux trois autres axes, ce qui est très difficile à conceptualiser mentalement, étant donné que le fait de traiter avec plus de trois axes spatiaux perpendiculaires ne semble pas avoir de sens géométrique logique, parce que, comme l'illustre la **Figure 3**, après avoir tourné 3 fois de  $90^\circ$  à partir d'un angle fixé à  $0^\circ$  sur un plan donné, une quatrième rotation de  $90^\circ$  ne peut que nous ramener à notre position de départ sur ce plan, à moins que cette rotation ne soit orientée perpendiculairement à ce plan.

Et lorsque 3 plans sont eux-mêmes perpendiculaires les uns aux autres, comme dans le système de coordonnées cartésiennes de la **Figure 2**, une quatrième rotation telle que celle illustrée par la **Figure 1b** ne peut que nous faire sortir de l'espace normal. Nous aborderons cette question de manière logique un peu plus loin. Rappelons maintenant quelques règles de base qui gouvernent le *plan complexe* avant de procéder plus avant.

La **Figure 3** représente le cercle vectoriel unitaire du *plan complexe* comme étant pivoté de  $90^\circ$  autour de l'axe des x, de sorte que le plan fait face au lecteur. Sur ce plan, une quantité vectorielle est résolue en deux composantes à angle droit l'une par rapport à l'autre, une composante  $a$ , dont la direction est le long de l'axe horizontal x, appelé *axe des réels*, et l'autre composante  $b$ , qui s'étend à angle droit par rapport à l'*axe des réels* dans une direction parallèle à l'*axe imaginaire*.

Un vecteur positif ayant sa direction le long de l'axe des x devient négatif s'il est multiplié par -1, soit ( $1 \cdot -1 = -1$ ), ce qui signifie qu'il pointera vers la gauche dans la **Figure 3**. Un vecteur positif ayant sa direction vers le haut le long de l'*axe imaginaire* devient négatif s'il est multiplié par -1, soit ( $i \cdot -1 = \sqrt{-1} \cdot -1 = -i$ ) et pointera vers le bas le long de l'*axe imaginaire*.

Augmenter les puissances de  $i$  revient à faire tourner le vecteur correspondant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre sur le *plan complexe*. Chaque augmentation de la puissance fait tourner le vecteur d'un  $90^\circ$  supplémentaire: ( $i^0=1$ ,  $i^1=i$ ,  $i^2=-1$ ,  $i^3=-i$ ). Les puissances croissantes ou décroissantes de  $i$  répètent simplement le même cycle  $1$ ,  $i$ ,  $-1$ ,  $-i$  autour de l'origine du cercle vectoriel unitaire sur le plan complexe. Pour cette raison, ( $i=\sqrt{-1}$ ) est souvent nommé l'*opérateur de rotation* [4].

La particularité de cet *opérateur de rotation* est que, par exemple, lorsqu'un *nombre complexe* tel que celui de l'Équation (5), résolu comme **P** dans la **Figure 1a**, est multiplié

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatale

par  $i$ , les segments  $a$  et  $b$  subissent tous deux une rotation de  $90^\circ$  dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, ce qui situe le point  $\mathbf{P}$  dans le deuxième quadrant :

$$P = i \cdot z = i \cdot (a + ib) = ia - b \quad (6)$$

La multiplication répétée du résultat de la rotation présentée dans l'Équation (6) aboutira à l'achèvement du cercle complet autour de l'origine du *plan complexe*, c'est-à-dire  $(-a - ib)$ , situant le point  $\mathbf{P}$  dans le troisième quadrant, puis  $(a - ib)$  le situant dans le quatrième quadrant, et enfin  $(a + ib)$ , le situant à nouveau dans le premier quadrant.

Tel que mentionné dans l'Introduction, Caspar Wessel a publié en 1797 un mémoire dans lequel il a introduit la forme polaire des *nombres complexes*, à partir de laquelle il a réussi à expliquer mathématiquement pourquoi un *vecteur unitaire* de valeur  $\sqrt{-1}$  représente géométriquement un segment de vecteur de longueur 1 pointant directement vers le haut le long de l'*axe imaginaire* du *plan complexe*.

Étant donné deux segments de droite partant de l'origine  $\mathbf{0}$  sur le *plan complexe* et formant des angles différents par rapport à l'*axe réel*, Wessel a établi qu'en multipliant les longueurs des deux segments de droite et en additionnant les deux angles, les longueurs étant toujours considérées comme des valeurs positives, ces deux opérations déterminent la longueur du segment de droite résultant et son angle de direction par rapport à l'*axe réel*, et que c'est cette définition d'un produit qui nous donne l'explication de ce que  $\sqrt{-1}$  signifie sur le plan géométrique.

Son raisonnement fut le suivant, cité à partir de la Référence ([4], p.53) :

"Suppose that there is a directed line segment that represents  $\sqrt{-1}$ , and that its length is  $l$  and its direction angle  $\theta$ . Mathematically then, we have  $\sqrt{-1} = l \angle \theta$ . Multiplying this statement by itself, i.e., squaring both sides, we have  $-1 = l^2 \angle 2\theta$  or, as  $-1 = 1 \angle 180^\circ$ , then  $l^2 \angle 2\theta = 1 \angle 180^\circ$ . Thus,  $l^2 = 1$  and  $2\theta = 180^\circ$ , and so,  $l = 1$  and  $\theta = 90^\circ$ . This says that  $\sqrt{-1}$  is the directed segment of length one pointing straight up along the vertical axis:"

"Supposons qu'il existe un segment de droite orienté qui représente  $\sqrt{-1}$ , que sa longueur est  $l$  et que sa direction est l'angle  $\theta$ . Mathématiquement, nous avons  $\sqrt{-1} = l \angle \theta$ . En multipliant cette expression par elle-même, c'est-à-dire en élevant les deux côtés au carré, on obtient  $-1 = l^2 \angle 2\theta$  mais, étant donné que  $-1 = 1 \angle 180^\circ$ , alors  $l^2 \angle 2\theta = 1 \angle 180^\circ$ . Ainsi,  $l^2 = 1$  et  $2\theta = 180^\circ$ , et donc,  $l = 1$  et  $\theta = 90^\circ$ . Cela signifie que  $\sqrt{-1}$  est le segment orienté de longueur 1 qui pointe vers le haut le long de l'axe vertical :"

$$i = \sqrt{-1} = 1 \angle 90^\circ \quad (7)$$

D'un point de vue géométrique, le symbole  $\angle$  signifie simplement "à un angle de rotation".

Son hypothèse de base a été établie en référence à la **Figure 1a**, tel que l'explique Nahin dans la Référence [4], Donc, si  $\theta = \tan^{-1}(b/a)$ , alors :

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \{ \cos(\theta) + i \sin(\theta) \} \quad (8)$$

La valeur de  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , qui est la longueur du *vecteur rayon*, est nommée *le module* du *nombre complexe*  $a + ib$ , et la valeur de l'angle polaire  $\tan^{-1}(b/a)$  est nommée *l'argument* de  $a + ib$ . Ainsi, en termes de longueur du *vecteur rayon* depuis l'origine jusqu'au point

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatale

$a+ib$ , une multiplication de deux segments de droite dirigés différents conduit à :

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \quad (9)$$

Nous avons donc une explication parfaitement logique de la raison pour laquelle  $i=\sqrt{-1}$  est un *vecteur unitaire* pivoté de  $90^\circ$  par rapport à l'*axe réel* dans la **Figure 1a**. Mais si l'on fait correspondre l'*axe réel* avec l'*axe des x* du système de coordonnées cartésiennes 3D, comme dans la **Figure 1b**, on observe également que l'*axe imaginaire* le long duquel le *vecteur unitaire i* est orienté n'est pas l'*axe des y* du système cartésien de coordonnées, et qu'il est plutôt perpendiculaire à celui-ci.

En résumé, il existe au moins 4 façons d'exprimer un *nombre complexe* :

$$z = a + ib, z = r \cos(\theta) + ir \sin(\theta), z = re^{i\theta}, z = \mathbf{r} \angle \theta \quad (10)$$

La fonction exponentielle  $e^z$  est liée aux *nombre complexes* via la formule d'Euler :

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (11)$$

Bien expliqué dans les manuels d'introduction à l'analyse complexe [27].

## 4. Les 3 plans complexes de l'hypersphère de Hamilton

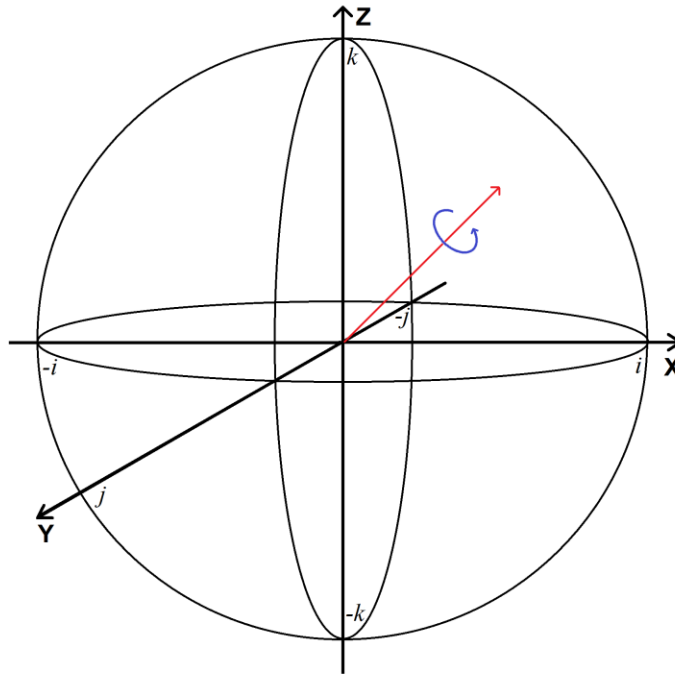
Tel que mentionné par Nahin à la Référence [4], c'est ce qui a conduit Hamilton à se demander ce qui ressortirait de l'introduction de tels *vecteurs unitaires orientés* dans l'espace 3D s'ils étaient mis en correspondance avec le système de coordonnées cartésiennes. C'est ce qui l'a conduit à découvrir les quaternions en 1843, qui sont des *nombre hypercomplexes* ayant la forme :

$$H = a \cdot 1 + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k} \quad (12)$$

Dans lequel  $a$  se prolonge sur l'*axe réel* comme dans l'équation du *plan complexe*  $z = a + ib$ , et dans lequel  $[b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}]$  sont les trois *vecteurs unitaires pivotés* du système de coordonnées du quaternion.

Nous entrons ici dans le domaine de la *géométrie hypercomplexe*, qui implique un système de coordonnées impliquant trois vecteurs unitaires similaires au système de coordonnées cartésiennes 3D traditionnel de la **Figure 2**, mais qui implique l'ensemble  $\mathbf{i}=\mathbf{j}=\mathbf{k}=1 \angle 90^\circ$ , chaque vecteur unitaire  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{k}$  étant perpendiculaire *par structure* aux deux autres, au lieu de l'ensemble  $\mathbf{i}=\mathbf{j}=\mathbf{k}=1$  qui sont mutuellement perpendiculaires uniquement *par définition*, et qui définissent maintenant 3 *plans complexes* mutuellement perpendiculaires, le *plan xy*, le *plan yz* et le *plan xz* à l'intérieur de l'hypersphère ainsi définie telle que représentée à la **Figure 4**.

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatiale



**Figure 4:** Le système de coordonnées du quaternion.

Ce faisant, Hamilton a fait un grand pas en avant en faisant passer le domaine mathématique complexe d'un *plan complexe 2D* sur lequel un vecteur de n'importe quelle longueur ancré à l'origine  $\mathbf{0}$  du système de coordonnées 2D pouvait être pivoté à n'importe quel angle possible, tel qu'illustré dans la **Figure 3**, à une configuration de *trois plans complexes mutuellement perpendiculaires* qui permettent désormais de faire pivoter l'*axe réel* lui-même à n'importe quel angle omnidirectionnel à l'intérieur de l'*hypersphère*, tel qu'illustré à la **Figure 4**.

Alors que le *plan complexe* (**Figure 3**) est divisé en 4 quarts de cercles, l'*hypersphère* (**Figure 4**) est divisée en 8 quarts de demi-sphère. Quatre constituent la demi-sphère supérieure et quatre la demi-sphère inférieure, le *plan xy* ayant été pris par convention comme séparateur par défaut entre les deux demi-sphères, et à l'intérieur de laquelle les *nombre hypercomplexes* tels que l'Équation (12) peuvent orienter et faire pivoter un point de l'*axe réel* dans toutes les directions à l'intérieur de l'*hypersphère*, soit une caractéristique largement utilisée dans la programmation graphique par ordinateur, par exemple.

### 5. Le système de coordonnées 3D du quaternion

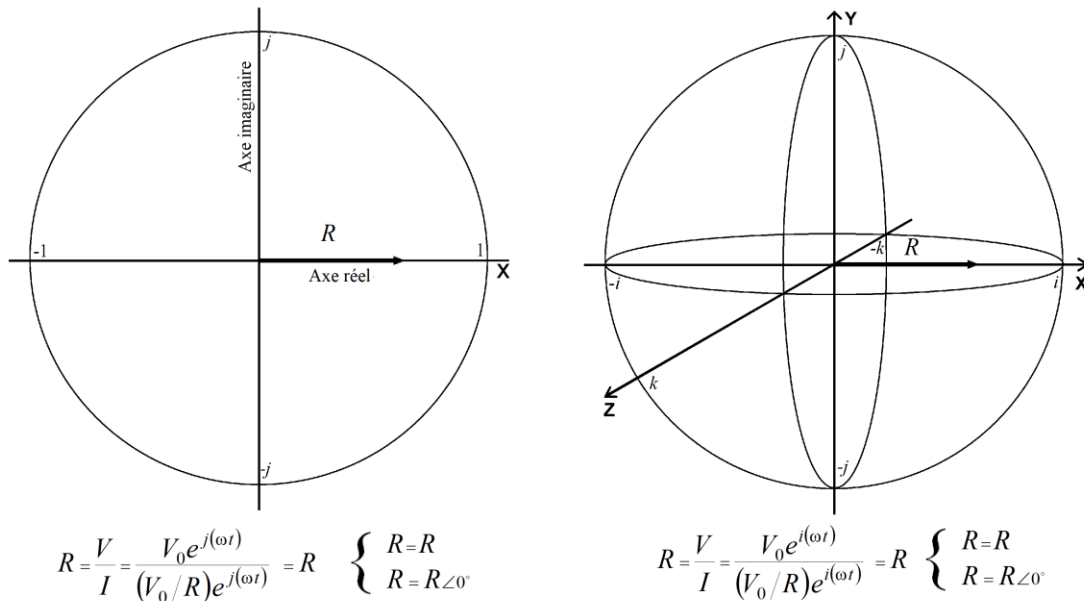
Nous ne discuterons pas ici de cette capacité bien connue des quaternions à faire pivoter les vecteurs de manière très utile, mais nous analyserons plutôt un aspect du système de coordonnées du quaternion  $i=j=k=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  qui ne semble pas avoir attiré beaucoup d'attention de la communauté mathématique, ni de la communauté physique d'ailleurs, malgré l'utilité connue de l'unité imaginaire  $i=\sqrt{-1}$  et du *plan complexe* pour résoudre les équations RLC de capacitance et d'inductance dans la conception des circuits

électroniques [28].

Pour commencer à résoudre ce problème, nous devons d'abord isoler de l'axe réel le système de coordonnées du quaternion. Cela peut être fait en mettant  $a$  à zéro dans l'Équation (12). Le système de coordonnées du quaternion triplement perpendiculaire  $ijk$  est maintenant défini sans son axe réel orientable de façon omnidirectionnelle.

$$H_0 = H_{[a=0]} = b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \quad (13)$$

Dans cette étude, à titre d'exemple pratique pour comparer le traitement dans le plan complexe 2D et le traitement dans le système de coordonnées 3D du quaternion, nous utiliserons une situation standard de réactance capacitive et inductive dans laquelle les valeurs de résistance  $R$  et de courant  $I$  sont traditionnellement représentées sur le plan complexe comme s'appliquant le long de l'axe réel tel que représenté du côté gauche de la Figure 5, tandis que la réactance capacitive  $C$  liée au champ électrique induit  $E$  est représentée comme étant orientée vers le côté négatif de l'axe imaginaire, tandis que la réactance inductive  $L$  liée au champ magnétique induit  $B$  est représentée comme étant orientée du côté positif de l'axe imaginaire (côté gauche de la Figure 7), ce qui fait qu'elles sont apparemment décalées de  $180^\circ$  l'une par rapport à l'autre (côté gauche de la Figure 5). La Référence [28] fournit des représentations visuelles très claires de ces 3 représentations sous forme complexe des équations de réactance RLC – reproduites sur le côté gauche des Figures 5, 6 et 7.



**Figure 5:** Résistance (forme complexe) - Comparaison entre la représentation 2D du plan complexe et la représentation 3D du système de coordonnées du quaternion.

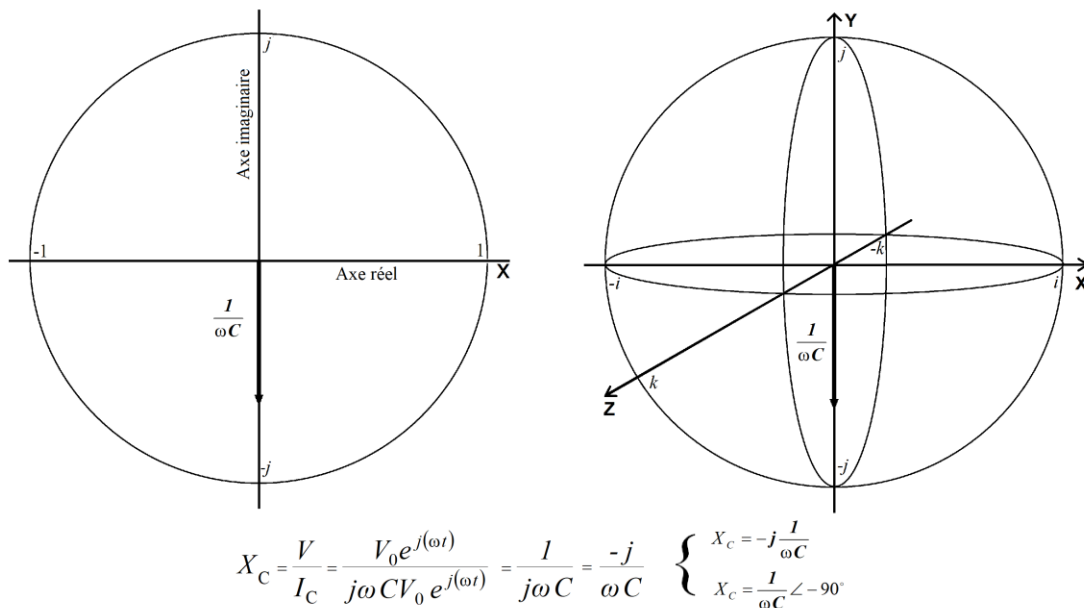
La représentation du côté droit de la Figure 5 montre que le vecteur résistance est toujours aligné le long de l'axe des  $x$ , maintenant représenté par le vecteur unitaire  $i = \sqrt{-1} = 1 \angle 0^\circ$  dans le système de coordonnées du quaternion. Le seul changement dans les équations est que le vecteur unitaire  $i$  remplace maintenant le vecteur unitaire  $j$  dans les équations de la résistance.

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatale

Notons que ce remplacement du *vecteur unitaire j* par *i* n'affecte en rien la résolution numérique des équations, puisque les deux *vecteurs unitaires* sont égaux à la même valeur  $\sqrt{-1}$ . D'aucuns diront qu'il serait contre-productif d'utiliser *i* de la sorte, puisque *j* a été choisi dans le contexte électronique pour représenter  $\sqrt{-1}$  précisément pour éviter toute confusion entre le symbole du *nombre irrationnel i* et le symbole standard I utilisé pour représenter le courant.

Le fait que la lettre I majuscule soit également utilisée comme symbole pour le courant, tandis que la lettre *i* minuscule est utilisée pour le *nombre irrationnel*, en combinaison avec le contexte d'utilisation, devrait être amplement suffisant pour éviter toute confusion.

Examinons maintenant les représentations comparatives des formes complexes de la réactance capacitive (**Figure 6**):



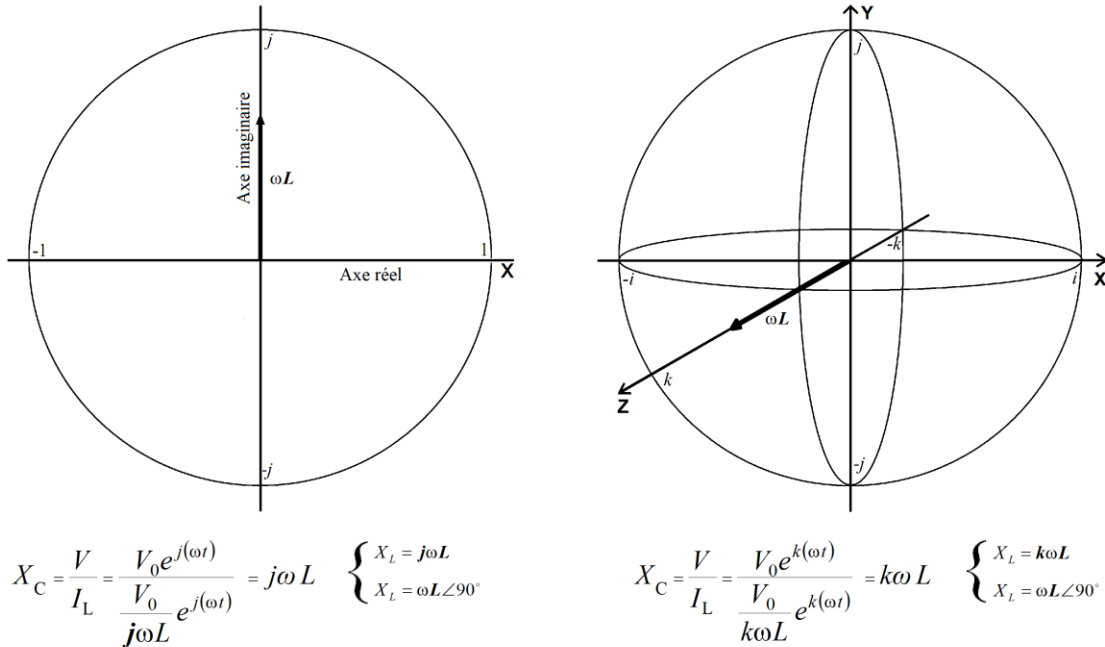
**Figure 6:** Réactance capacitive (forme complexe) - Comparaison entre la représentation 2D du *plan complexe* et la représentation 3D du *système de coordonnées du quaternion*.

Dans la **Figure 6**, nous observons qu'aucun changement n'est à noter entre la représentation 2D du *plan complexe* et la représentation 3D du *système de coordonnées du quaternion*, étant donné que l'axe vertical du *plan complexe* était déjà identifié par le symbole  $j = \sqrt{-1} = 1 \angle 90^\circ$ . Il n'est donc pas nécessaire de modifier les équations.

Un changement majeur sera cependant observé pour l'équation d'impédance, comme le montre la **Figure 7**. Il est bien établi dans la théorie électromagnétique et facilement confirmable expérimentalement que le champ magnétique autour d'un fil, ou d'une bobine de fil, s'auto-oriente perpendiculairement au champ électrique ( $\angle 90^\circ$ ).



## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatale



**Figure 7:** Réactance inductive (forme complexe) - Comparaison entre les représentations 2D du *plan complexe* et 3D du *système de coordonnées du quaternion*.

Il est en effet bien établi que lorsque des électrons sont mis en mouvement dans un fil en lui appliquant un voltage, un champ magnétique  $\mathbf{B}$  macroscopique se développe instantanément autour du fil, qui peut facilement être détecté directement avec une boussole magnétique très ordinaire, et dont la direction autour du fil est très précisément perpendiculaire à la direction du mouvement du flux d'électrons dans le fil.

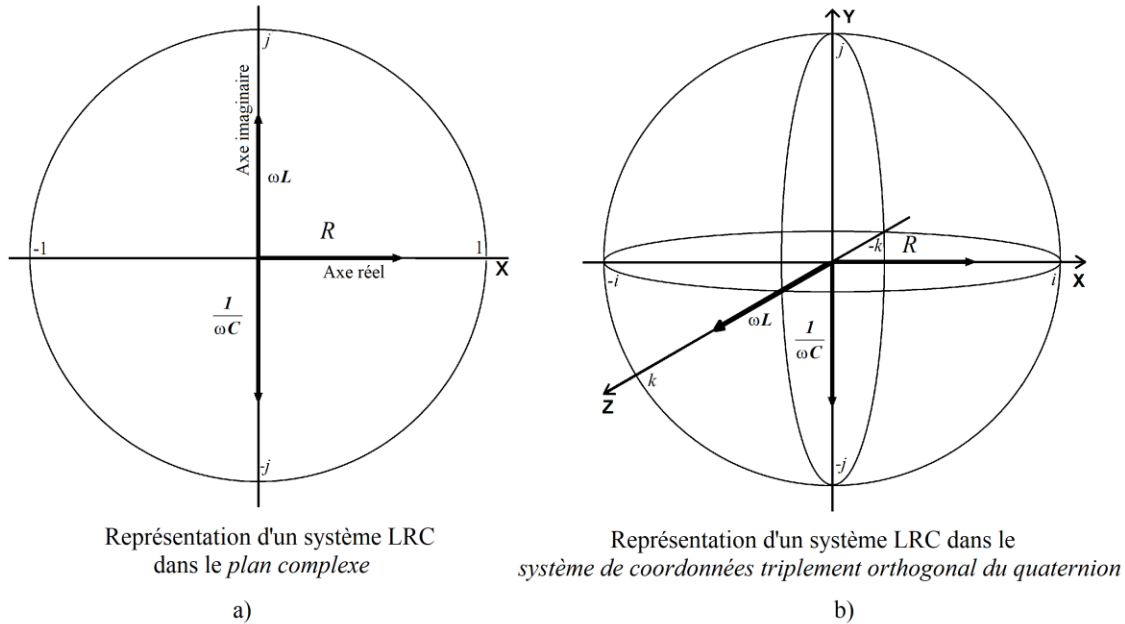
Les expériences d'Einstein-de Haas et de Barnett réalisées au début du 20e siècle [29] ont clairement établi que l'établissement d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$  à un niveau macroscopiquement mesurable lié au mouvement du flux d'électrons est dû à l'addition des champs magnétiques  $\Delta\mathbf{B}$  individuels locaux de l'énergie porteuse de chaque électron impliqué, qui existe au niveau de chaque électron dans une relation triplement perpendiculaire invariante, rigidement maintenue avec les champs  $\Delta\mathbf{E}$  correspondants et leur énergie de momentum  $\Delta\mathbf{K}$ , liés à la relation bien établie du produit vectoriel croisé  $\mathbf{E}/\mathbf{B}=\mathbf{v}$  des vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ , comme le montre la **Figure 2**.

Ainsi, étant donné que le flux d'électrons initié par l'application d'un voltage au fil – impliquant bien sûr d'innombrables électrons dans le fil qui commencent tous à se déplacer dans la même direction à la surface du fil – forcera leurs champs magnétiques  $\Delta\mathbf{B}$  individuels à s'aligner tous dans une orientation parallèle de spin magnétique additive perpendiculaire à la direction du mouvement du flux d'électrons.

Il est également bien établi que le flux d'électrons se produit à la surface du fil, chaque électron négatif en mouvement demeurant fortement attiré tout au long de sa progression par le noyau atomique positif le plus proche qu'il croise dans le fil ; c'est-à-dire une direction d'interaction entre les électrons et les noyaux atomiques qui établit les champs électriques  $\Delta\mathbf{E}$  locaux comme étant orientés perpendiculairement à la fois à la direction du mouvement du flux d'électrons à la surface du fil, d'une part, et à la direction du champ  $\mathbf{B}$  macroscopique autour du fil, d'autre part.

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatiale

Cette triple orthogonalité, traditionnellement représentée par la **Figure 2**, peut maintenant être visualisée dans le système de coordonnées triplement orthogonal de l'*hypersphère* de Hamilton, tel qu'illustré sur les côtés droits des **Figures 5, 6 et 7**, regroupée à des fins de comparaison dans la **Figure 8**.



**Figure 8:** Représentations comparatives de la structure vectorielle électromagnétique du système RLC dans le *plan complexe* 2D traditionnel et dans le *système de coordonnées triplement orthogonales du quaternion*.

En comparant le système de coordonnées cartésiennes 3D de la **Figure 2**, traditionnellement utilisé en mécanique électromagnétique pour représenter la relation électromagnétique triplement orthogonale bien établie, avec la représentation de la **Figure 8b**, le lecteur peut certainement apprécier que la représentation du *système de coordonnées triplement orthogonales du quaternion* est une représentation plus adéquate de cette relation vectorielle que celle du *plan complexe* 2D.

Ainsi, une éventuelle mise à niveau des formes complexes des équations électroniques LC et RLC de la représentation 2D du *plan complexe* vers une représentation 3D du *système de coordonnées du quaternion* aurait l'avantage de représenter correctement l'orientation vectorielle de la composante L liée au champ **B** dans les systèmes LC et RLC à son véritable angle de décalage de  $\angle 90^\circ$  par rapport à la capacitance de la composante C liée au champ **E**. Le *plan complexe* représente correctement la relation orthogonale entre les deux composantes L et C comme étant déphasées de  $\angle 90^\circ$  par rapport à la direction de l'axe *i-x*, mais représente incorrectement les composantes L et C comme étant déphasées de  $\angle 180^\circ$  l'une par rapport à l'autre, de la seule manière dont le *plan complexe* 2D peut les représenter.

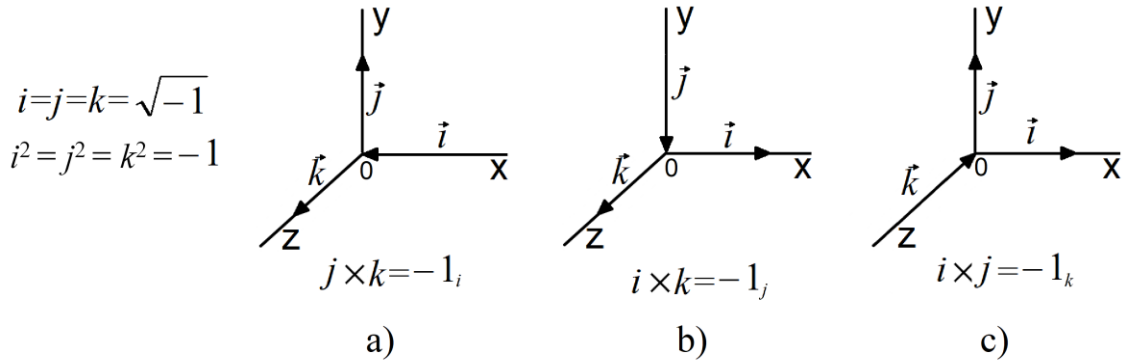
## 6. Analyse détaillée du système de coordonnées 3D du quaternion

Si l'on se réfère de nouveau à l'Équation (13) qui isole le *système de coordonnées du quaternion*, impliquant les 3 coordonnées perpendiculaires de l'*hypersphère* de Hamilton [ $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ ], quelques autres caractéristiques de ce système de coordonnées méritent d'être examinées de plus près. La première observation est que tout produit vectoriel croisé de deux de ces *vecteurs unitaires* entraîne l'inversion du sens d'application du troisième *vecteur unitaire* qui s'applique dans la troisième direction perpendiculaire, tel qu'illustré par la **Figure 9**.

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -1_i \quad \mathbf{c}\mathbf{j} \times d\mathbf{k} = d\mathbf{k} \times c\mathbf{j} = -b_i \quad (14)$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = -1_j \quad b\mathbf{i} \times d\mathbf{k} = d\mathbf{k} \times b\mathbf{i} = -c_j \quad (15)$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -1_k \quad b\mathbf{i} \times c\mathbf{j} = c\mathbf{j} \times b\mathbf{i} = -d_k \quad (16)$$



**Figure 9:** Illustration du produit croisé de *vecteurs unitaires* définis par structure comme  $\mathbf{i}=\mathbf{j}=\mathbf{k}=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  résultant en l'inversion du sens d'application du troisième *vecteur unitaire*.

Analysons les implications. En observant que le *vecteur unitaire* perpendiculaire résultant de chaque produit vectoriel croisé est un *vecteur unitaire réel* négatif, cela ne peut que signifier que toute valeur liée à ce *vecteur unitaire* en conséquence du produit croisé des valeurs liées aux deux premiers *vecteurs unitaires* complexes sera appliquée en sens inverse, c'est-à-dire vers le centre de la structure triplement orthogonale (**Figure 9**), étant donné qu'elle est définie comme s'appliquant entre l'origine  $\mathbf{0}$  et la distance 1 par rapport à l'origine.

En référence à l'Équation (14) et à la **Figure 9a**, cela impliquerait qu'un produit vectoriel croisé des valeurs  $c\mathbf{j}$  et  $d\mathbf{k}$  entraînerait une inversion du sens d'application de la valeur liée au vecteur inversé résultant  $b_i$  ; qu'un produit vectoriel croisé des valeurs  $b\mathbf{i}$  et  $d\mathbf{k}$  de l'équation (15) et de la **Figure 9b** entraînerait une inversion du sens d'application de la valeur liée au vecteur  $c_j$  résultant ; et qu'un produit vectoriel croisé des valeurs  $b\mathbf{i}$  et  $c\mathbf{j}$  de l'équation (16) et de la **Figure 9c** entraînerait une inversion du sens d'application de la valeur liée au vecteur  $d_k$  résultant.

Par conséquent, si nous devons placer un *système de référence de coordonnées* identique à celui de la **Figure 8b**, avec ses *vecteurs unitaires* définis comme  $\mathbf{i}=\mathbf{j}=\mathbf{k}=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  au *centre-de-présence* d'une particule élémentaire, et si la substance énergie

## *Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatiale*

dont est constituée cette particule élémentaire présentait des caractéristiques lui permettant d'osciller entre les états des deux vecteurs unitaires dont le produit croisé aboutit à une telle inversion du sens d'application du vecteur unitaire perpendiculaire qui en résulte, cela permettrait de clarifier et de confirmer le sens d'application de la valeur liée au *vecteur unitaire* inversé.

Il se trouve que les conditions que de Broglie a identifiées en 1937 pour que les photons électromagnétiques localisés suivant des trajectoires précises de moindre action obéissent aux équations de Maxwell [22], impliquent précisément que la *substance énergie* dont sont faits ces photons localisés, tels qu'ils furent définis par Einstein dans son premier article de 1905 [30], doit obligatoirement être une telle *substance*, dont les caractéristiques requises ont été identifiées aux Références [10] [11].

Les conditions identifiées par de Broglie ([22], p.277) étaient que pour satisfaire à la fois la statistique de Bose-Einstein et la loi de Planck, pour expliquer parfaitement l'effet photoélectrique tout en obéissant aux équations de Maxwell et demeurer totalement conforme aux propriétés de la théorie de symétrie des corpuscules complémentaires de Dirac, le photon localisé ne pouvait s'expliquer que s'il était constitué de deux particules, ou demi-photons de spin  $1/2$ . Il ajoute qu'un tel couple complémentaire de particules est susceptible de s'annihiler au contact de la matière en cédant toute son énergie, ce qui rend parfaitement compte des caractéristiques de l'effet photoélectrique, et qu'étant constitué de deux particules élémentaires de spin  $h/4\pi$ , il obéira à la statistique de Bose-Einstein comme l'exige la précision de la loi de Planck pour le corps noir, et enfin que ce modèle du photon permet de définir un champ électromagnétique lié à la probabilité d'annihilation du photon, champ qui obéit aux équations de Maxwell et qui a toutes les caractéristiques des ondes lumineuses électromagnétiques.

Les caractéristiques identifiées dans les Références [10] [11] que la substance énergie doit posséder pour que les photons électromagnétiques localisés obéissent à l'ensemble des conditions identifiées par de Broglie sont *l'incompressibilité*, la *fluidité*, *l'élasticité* et une *tendance-à-toujours-demeurer-en-mouvement*.

Revenons maintenant à cette autre conclusion de de Broglie citée précédemment, selon laquelle la non-individualité des particules, le principe d'exclusion et l'énergie d'échange sont trois énigmes intimement liées à l'impossibilité de représenter exactement des entités physiques élémentaires dans le cadre de l'espace tridimensionnel continu – ou plus généralement de l'espace-temps quadridimensionnel continu. Cette conclusion est liée à l'impossibilité d'identifier une quelconque manière mécanique logique par laquelle cette substance énergie pourrait être mise en oscillation électromagnétique interne entre les deux états représentés par les vecteurs unitaires  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{k}$  du système de coordonnées cartésiennes 3D, dans les limites restreintes de l'espace 3D normal, qui expliquerait de manière cohérente leurs fréquences mesurables.

Il n'a pas non plus été possible d'établir, dans les limites restreintes de l'espace 3D normal, une méthode mécanique logique permettant d'expliquer comment des photons électromagnétiques d'une énergie supérieure à 1,022 MeV, supposés sans masse, réussissent à se séparer en une paire d'électron et positon massifs, tel que découvert dans les années 1930 lors de la première détection de positons par Anderson dans sa chambre à bulles [31], dont une occurrence a été clairement enregistrée lors de l'expérience FERMILAB E-632, telle qu'analysée à la Référence [32], qui a été réalisée dans la

chambre à bulles de 15 pieds du FERMILAB [33].

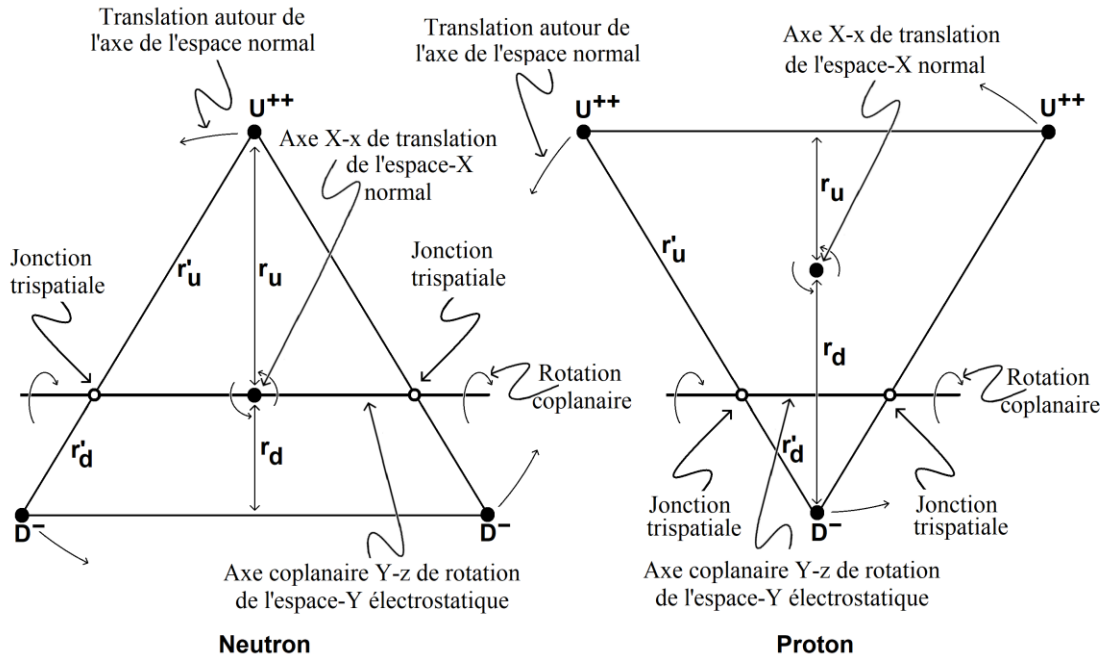
Il n'a pas non plus été possible de fournir une explication mécanique à la charge électrique unitaire invariante de l'électron et du positon, ni aux charges fractionnaires des trois composantes internes collisionables des protons et des neutrons.

Il n'a pas non plus été possible de fournir une explication mécanique à l'interaction relative du *spin magnétique* entre les électrons chargés qui leur permet de s'apparier en orientation antiparallèle attractive pour établir les liaisons covalentes entre atomes malgré leur charges électrique répulsive égales de même signe, en paires pour remplir les orbitales électroniques dans les atomes et en paires de Cooper se déplaçant librement, et finalement en orientation de spin parallèle répulsive relative par défaut pour empêcher les électrons de s'écraser sur les noyaux atomiques dans les atomes.

Il n'a pas non plus été possible d'établir, dans les limites restreintes de l'espace tridimensionnel normal, une méthode mécanique logique permettant d'expliquer la stabilisation des structures à trois sous-composants collisionables des protons et des neutrons tels qu'observés, le proton étant stable en permanence et le neutron devenant instable lorsqu'il est isolé, soit deux structures qui, pour demeurer cohérentes avec la nature électromagnétique de leurs triades de sous-composants collisionables, doivent mécaniquement pivoter simultanément en rotation et en translation dans deux directions perpendiculaires autour de deux axes de rotation/translation perpendiculaires l'un par rapport à l'autre qui s'intersectent dans la structure du neutron, ce qui explique son instabilité lorsque isolé, et ne se croisent pas dans la structure du proton, ce qui explique sa stabilité, tel qu'analysé dans à la Référence [32].

Pour permettre aux lecteurs de prendre plus facilement conscience de l'état de mouvement interne inattendu des nucléons, les illustrations utilisées à la Référence [32] dans le contexte de l'analyse et de la publication en 2013 des structures internes à trois sous-composants collisionables du proton et du neutron sont reproduites ici à la **Figure 10**, représentant les sous-composants électromagnétiques chargés collisionables impliqués uniquement par leurs *centres-de-présence*, sans illustrer leurs complexes vectoriels trispataux, qui ont été mis à disposition aux Références [13] [14] dans le contexte de l'établissement du champ vectoriel commun des mécaniques électromagnétique et cinématique [14].

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatiale



**Figure 10:** Axes de rotation et de translation des triades de sous-composants collisionables des protons et neutrons.

## 7. La géométrie trispatiale

Présentée pour la première fois dans un ouvrage de vulgarisation en 1999 – qui a été réédité en 2012 en format EBook [34] – la géométrie spatiale plus étendue dont de Broglie avait pressenti la nécessité, apportant la solution à ces processus mécaniques qu'il avait conclu à l'impossibilité de les établir dans les limites de notre espace 3D normal, a ensuite été présentée en juillet 2000 au Congrès-2000 tenu à l'Université d'État de Saint-Pétersbourg [23], et a finalement été publiée formellement en avril 2013 dans la Référence [35].

Cette géométrie de l'espace plus étendue a permis d'expliquer les fréquences des photons localisés au moyen d'une oscillation mécanique de la moitié de l'énergie d'un photon entre l'état du champ  $E$  et l'état du champ  $B$ , en accord avec l'interprétation initiale de Maxwell de l'induction réciproque des deux champs sur un plan transverse à sa direction de mouvement, tel qu'analysé aux Références [13] [14].

Elle a également permis d'expliquer comment la quantité totale d'énergie d'un photon en mouvement libre d'énergie supérieure à 1,022 MeV pouvait se convertir en une paire d'électron et positon *massifs* en transférant mécaniquement toute son énergie sur un plan perpendiculaire à l'espace normal [26].

Elle a également permis d'apporter une explication mécanique au problème impossible à résoudre dans l'espace 3D normal au mouvement de rotation/translation des triades internes des nucléons autour de deux axes qui s'intersectent perpendiculairement au sein de la structure du neutron, ce qui explique son instabilité lorsqu'il est isolé, mais qui ne se croisent pas tout en demeurant perpendiculaires l'un par rapport à l'autre au sein de la

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatiale

structure du proton, ce qui explique la stabilité totale du proton [32].

Cette géométrie spatiale étendue a également permis de fournir une explication mécanique à la charge électrique unitaire invariante de l'électron et du positon, ainsi qu'une explication mécanique aux charges fractionnaires des trois sous-composants internes collisionables des protons et des neutrons, tel qu'analysé à la Référence [32].

Elle a également fourni une explication mécanique à l'interaction relative du *spin magnétique* qui permet aux électrons chargés de s'apparier en orientation antiparallèle attractive pour établir les liaisons covalentes entre les atomes malgré leur charges électrique répulsive de même signe, en paires pour remplir les orbitales électroniques dans les atomes et en paires de Cooper en mouvement libre, et enfin en orientation relative par défaut répulsive de spin parallèle pour empêcher les électrons de s'écraser sur les noyaux atomiques dans les atomes, comme l'a confirmé l'expérience qui sous-tend le développement de la géométrie trispatiale [26].

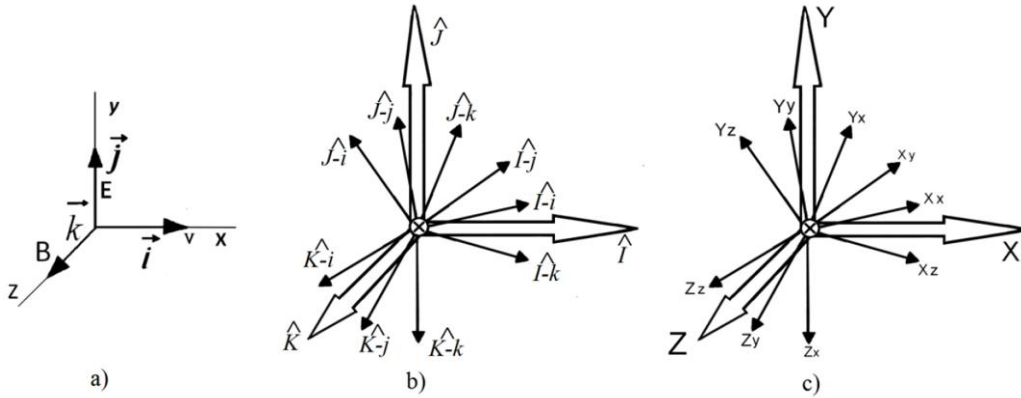
Brièvement présentée, cette solution découle de la triple orthogonalité vectorielle invariante, établie de longue date du produit vectoriel croisé des vecteurs des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ , qui est si fondamentale en électromagnétisme (**Figure 11a**). Lorsque les *vecteurs mineurs*  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{k}$  de l'espace normal représentant les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  en électromagnétisme classique sont développés pour devenir des espaces vectoriels majeurs 3D pleinement développés représentés par les *vecteurs majeurs*  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$ , chacun possédant son propre ensemble interne de *vecteurs mineurs*  $\mathbf{ijk}$ , alors un espace normal vectoriel majeur 3D pleinement développé représenté par un *vecteur majeur*  $\mathbf{I}$  émerge par le produit vectoriel croisé des *vecteurs majeurs*  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$ , qui maintient également son ensemble interne habituel de *vecteurs mineurs*  $\mathbf{ijk}$  (**Figures 11b et 11c**).

Cette toute nouvelle géométrie de l'espace vectoriel a effectivement permis de représenter logiquement non seulement les photons en mouvement libre selon les conditions de de Broglie, mais aussi d'expliquer mécaniquement comment de tels photons d'énergie suffisante peuvent se découpler en paires électron-positon *massives* [26], et aussi d'expliquer mécaniquement comment des triades d'électrons et de positons suffisamment thermiques peuvent accélérer pour se stabiliser en tant que triades les plus énergiques de configurations de particules électromagnétiques élémentaires pouvant exister dans l'univers, c'est-à-dire, les protons et les neutrons [32], et dont l'intensité de leur nouvel environnement électromagnétique expliquerait la dérive de leurs caractéristiques de masse et de charge vers leurs états observés.

L'origine ponctuelle commune  $\mathbf{0}$  des trois espaces vectoriels orthogonaux se conceptualise alors un volume  $dV$  infinitésimal à travers lequel l'énergie d'un quantum localisé, désormais perçu comme une quantité locale de *substance énergie* existant physiquement, peut maintenant transiter entre les trois espaces comme s'il s'agissait de vases communicants, pour établir l'état d'équilibre requis par la symétrie, et dont la section transversale infinitésimale  $ds$  sert de point d'appui contre lequel la moitié du quantum d'énergie peut appliquer sa pression pour provoquer le mouvement dans l'espace de l'autre moitié – qui oscille transversalement en mode stationnaire sur un plan perpendiculaire à la direction de ce mouvement dans l'espace – lorsque l'environnement électromagnétique local le permet. C'est ainsi qu'émergea pour fins de visualisation, l'espace vectoriel augmenté  $3 \times 3D + 1$  qui sous-tend le modèle trispatial, l'élément  $+1$  représentant bien sûr la dimension temps, qui est analysée à la référence [36].



## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatiale



**Figure 11:** Ensemble des vecteurs unitaires majeurs et mineurs applicables à la géométrie trispatiale.

La difficulté pour nous de visualiser mentalement plus de trois dimensions perpendiculaires à la fois est résolue en traitant chacun des espaces vectoriels 3D majeurs  $I J K$  comme s'il s'agissait de parapluies pliés à trois nervures se rencontrant perpendiculairement à leurs extrémités, qui, une fois pliés, réduisent l'ensemble des principaux espaces vectoriels 3x3D à la représentation vectorielle 3D de base de la **Figure 11a**, et si l'ensemble de *vecteurs unitaires majeurs*  $I = J = K = 1$  est remplacé par un ensemble de *vecteurs unitaires majeurs*  $I=J=K=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  dans la **Figure 11b**, le *vecteur unitaire majeur*  $I$  inversera sa direction d'application lorsque le produit croisé des *vecteurs unitaires majeurs*  $J$  et  $K$  sera appliqué ( $J \times K = -1_I$ ) et l'énergie d'impulsion liée au vecteur unitaire  $I = \sqrt{-1} = -1\angle 180^\circ$  sera correctement orientée pour appliquer efficacement sa pression contre la surface infinitésimale  $ds$  en propulsant l'énergie inerte oscillant transversalement présente de l'autre côté de la jonction  $ds$  séparant les trois espaces, ce qui serait conforme au résultat de l'Équation (14), tel qu'illustré à la **Figure 9a**.

Le simple fait d'ouvrir les parapluies un par un permet de visualiser en séquence le mouvement de la *substance énergie* qui circule dans chaque espace vectoriel 3D de l'ensemble.

Le produit croisé des vecteurs  $j$  et  $k$ , tel qu'il est traditionnellement établi dans le système de coordonnées cartésiennes classique impliquant les vecteurs unitaires  $i=j=k=1$  (**Figure 2**, reproduite à la **Figure 11a**), semble laisser le vecteur résultant comme s'appliquant dans la direction positive  $j \times k = 1_i$ , mais cela le laisse en réalité indéfini car un vecteur unitaire défini comme  $i=1$  n'est pas fondamentalement directionnel alors qu'un *vecteur unitaire* défini comme  $i = \sqrt{-1} = -1\angle 180^\circ$  est directionnel par structure, ce qui confirme clairement son sens d'application inverse, c'est-à-dire pour que l'élément lié au *vecteur unitaire maintenant réel* ( $-1\angle 180^\circ$ )<sub>i</sub> soit représenté géométriquement comme exerçant sa pression sur les deux éléments représentés par les deux *vecteurs unitaires complexes*  $j \times k$  qui sont maintenant impliqués dans le produit vectoriel croisé correspondant.

Depuis l'espace  $X$  normal réel, toute l'énergie présente dans les espaces  $Y$  et  $Z$  électrostatiques et magnétostatiques complexes à tout moment donné de chaque cycle de la fréquence électromagnétique du quantum de substance concerné semblera posséder une inertie à la fois longitudinale et transversale, c'est-à-dire une inertie

omnidirectionnelle. En d'autres termes, il semblera posséder une masse électromagnétique. Métaphoriquement parlant, l'énergie présente dans ces deux espaces complexes supplémentaires se comporterait comme si elle était captive à l'intérieur d'un conteneur invisible qui résisterait à toute poussée provenant de n'importe quelle direction de l'espace X normal réel, l'énergie du momentum unidirectionnel présent dans l'espace X exerçant sa pression contre son *centre-de-présence*, tel qu'analysé aux Références [10] [11].

## 8. Le photon électromagnétique

Il se trouve que c'est aussi le cas pour la composante momentum  $[(hc/2\lambda)_x \mathbf{I} \mathbf{i}]$  du photon électromagnétique localisé à double-particule défini selon les conditions de Louis de Broglie, qui a donné lieu à l'établissement de son Équation LC (17). Publiée pour la première fois en 2004 dans un ouvrage de vulgarisation [37] largement distribué en format livre de poche dans de nombreux départements de physique des institutions, cette équation et ses dérivées connexes furent ensuite publiée formellement en 2013 dans la Référence [35], puis republiée en 2016 dans la Référence [10] pour expliquer tous les aspects de son origine ontologique :

$$\mathbf{E} \mathbf{I} \mathbf{i} = \left( \frac{hc}{2\lambda} \right)_x \mathbf{I} \mathbf{i} + \left[ 2 \left( \frac{e^2}{4C} \right)_Y (\mathbf{J} \mathbf{j}, \mathbf{J} \mathbf{j}) \cos^2(\omega t) + \left( \frac{L i^2}{2} \right)_Z \mathbf{K} \sin^2(\omega t) \right] \quad (17)$$

dans laquelle:

$$C = 2\varepsilon_0 \alpha \lambda \quad L = \frac{\mu_0 \alpha \lambda}{8\pi^2} \quad i = \frac{2\pi e c}{\alpha \lambda} \quad (18)$$

ainsi que son équivalent impliquant les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ , établi en fonction du produit vectoriel croisé de l'Équation (14), c'est-à-dire  $c\mathbf{j} \times d\mathbf{k} = -\mathbf{b}_i$ :

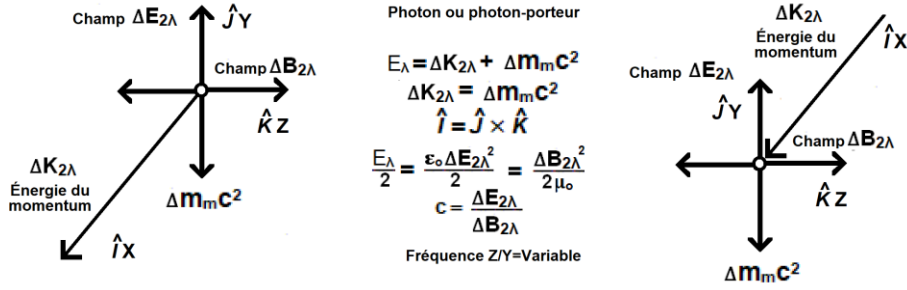
$$\mathbf{E} \mathbf{I} \mathbf{i} = \left( \frac{hc}{2\lambda} \right)_x \mathbf{I} \mathbf{i} + \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}_{2\lambda}^2}{4} \right)_Y (\mathbf{J} \mathbf{j}, \mathbf{J} \mathbf{j}) \cos^2(\omega t) + \left( \frac{\mathbf{B}_{2\lambda}^2}{2\mu_0} \right)_Z \mathbf{K} \sin^2(\omega t) \right] \mathbf{V}_{2\lambda} \quad (19)$$

dans laquelle:

$$\mathbf{E} = \frac{\pi e}{\varepsilon_0 \alpha^3 \lambda^2} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \pi e c}{\alpha^3 \lambda^2} \quad \mathbf{V} = \frac{\alpha^5 \lambda^3}{2\pi^2} \quad (20)$$

Cette triple relation orthogonale entre les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  du photon, perpendiculaires l'un à l'autre, représentant également leurs contreparties L et C, propulsés par son énergie de momentum  $\Delta\mathbf{K}$ , a été illustrée par l'image de gauche de la **Figure 12** dans les Références [13] [14] :

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatiale



**Figure 12:** Complexe vectoriel trispatial d'un photon ou d'un photon-porteur.

Bien sûr, on pourrait faire valoir que les Équations (17) et (19) révèlent que la valeur  $b$  liée au vecteur  $i_x$  devrait être représentée visuellement comme appliquant une pression directe contre le *centre-de-présence* de la particule – coïncidant avec l'emplacement  $\mathbf{0}$  du *système de coordonnées de référence* – comme l'illustre provisoirement la représentation du côté droit de la **Figure 12**, mais étant donné que cette relation était directement illustrée avec la **Figure 13** qui l'accompagnait systématiquement, il fut jugé que la représentation de gauche véhicule la même idée vectorielle tout en isolant plus clairement le centre de la relation triplement orthogonale, qui coïncide avec la position  $\mathbf{0}$  du système de coordonnées, et qui est l'emplacement commun de l'origine ou du point d'application de l'ensemble des vecteurs décrivant la structure interne du photon à double-particule de Broglie. De ce point de vue, l'Équation (16), par exemple, pourrait être reformulée comme suit :

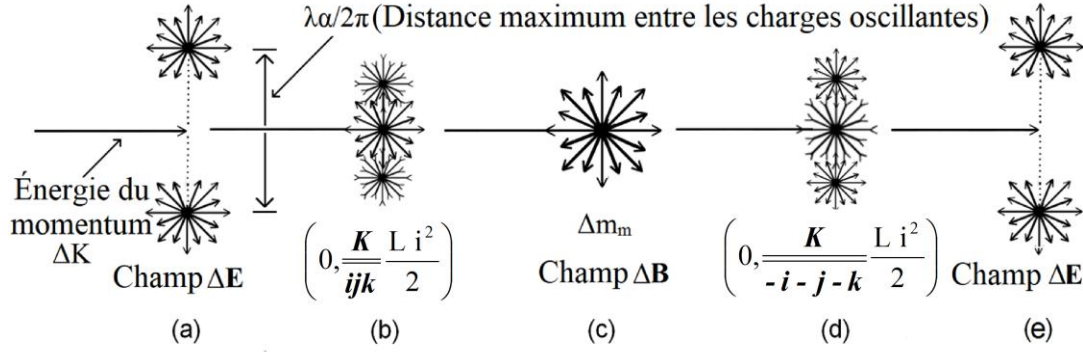
$$\vec{E} \vec{i} = \left( 0, (-I/i) \frac{hc}{2\lambda} \right)_x + \left[ \begin{array}{l} \left\{ \left( 0, (J//j) \frac{e^2}{4C} \right) + \left( 0, (J// - j) \frac{e^2}{4C} \right) \right\}_y \cos^2(\omega t) + \\ \left\{ \left( 0, (K//ijk) \frac{L i^2}{2} \right) + \left( 0, (K// - i - j - k) \frac{L i^2}{2} \right) \right\}_z \sin^2(\omega t) \end{array} \right] \quad (21)$$

Dans laquelle les *vecteurs unitaires majeurs*  $\mathbf{I}=\mathbf{J}=\mathbf{K}=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  représentent les 3 espaces mutuellement orthogonaux de la géométrie trispatiale, et les trois ensembles de *vecteurs unitaires mineurs*  $\mathbf{i}=\mathbf{j}=\mathbf{k}=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  représentent les systèmes de coordonnées tridimensionnels intérieurs de chaque espace, et que les représentations vectorielles  $(\mathbf{I//i}, \mathbf{J//j}, \mathbf{J// - j}, \mathbf{K//ijk}, \mathbf{K// - i - j - k})$  relie le(s) *vecteur(s) unitaire(s) mineur(s)* de l'espace intérieur subordonnés au *vecteur unitaire majeur* local  $\mathbf{I}, \mathbf{J}$  ou  $\mathbf{K}$  de l'espace concerné.

La configuration vectorielle  $(\mathbf{K//ijk})$  représente la phase d'expansion sphérique de la composante magnétique de l'énergie du photon vers une présence maximale dans l'espace Z magnétostatique (**Figure 13b**), alors qu'il est en train d'évacuer l'espace Y (**Figure 13a**), tandis que la configuration vectorielle  $(\mathbf{K// - i - j - k})$  représente sa phase de régression sphérique vers une présence nulle dans l'espace Z magnétostatique (**Figure 13d**), alors qu'il réintègre l'espace Y sous la forme de charges jumelles s'éloignant l'une de l'autre dans l'espace Y (**Figure 13e**) jusqu'à une présence et écartement maximum dans l'espace Y, ce qui initie le cycle suivant de son oscillation.

La relation entre la polarisabilité des photons électromagnétiques et l'aspect double-particule de son état de champ  $\mathbf{E}$  dans l'espace Y, illustrée par la **Figure 13a**, est analysée dans les Références [10] [11].

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatale



**Figure 13:** Représentation du cycle d'oscillation transversale stationnaire du demi-quantum électromagnétique d'un photon en mouvement libre ou du photon porteur d'un électron.

Nous pouvons maintenant formuler l'Équation (17) selon la configuration du produit vectoriel croisé émergent du *système de coordonnées de référence du quaternion* de l'Équation (13), selon laquelle :

$$b = \left( \frac{hc}{2\lambda} \right)_{-x_i}, \quad c = 2 \left( \frac{e^2}{4C} \right)_{jY}, \quad d = \left( \frac{L i^2}{2} \right)_{kZ} \quad (22)$$

et finalement :

$$E = |-b_x| + [c j \cos^2(\omega t) + d k \sin^2(\omega t)] \quad (23)$$

Dans laquelle  $-b$  représente l'énergie du momentum qui exerce une pression sur le *centre-de-présence* de la particule visualisée comme un point d'appui infinitésimal  $ds$  contre lequel cette pression peut s'exercer (Équation (14) et **Figure 9a**) tel que décrit dans les Références [13] [14], propulsant à la vitesse de la lumière dans le vide les composantes  $c$  et  $d$  de l'Équation (23) qui sont en oscillation constante sur le plan  $JK$  perpendiculaire à sa direction de mouvement dans l'espace  $X$ , à travers le volume infinitésimal  $\Delta V$  déjà mentionné qui constitue la jonction entre les trois espaces vectoriels au point  $\mathbf{0}$  du produit croisé  $\mathbf{J} \times \mathbf{K} = \mathbf{I}$ , de la **Figure 11b** qui établit la caractéristique de vases communiquant de l'ensemble.

## 9. La masse au repos de l'électron et sa charge électrique

Il reste un dernier cas de produit vectoriel croisé à mettre en perspective, illustré par l'Équation (15) et la **Figure 9b**.

Ce cas concerne la mécanique du découplage d'un photon électromagnétique *sans masse* de 1,022 MeV ou plus en une paire de deux particules *massives* de signes électriques opposés avec des masses égales ( $m_0 = 8,18710414 \times 10^{-14}$  joules/ $c^2 = 0,511$  MeV/ $c^2$ ) et une charge électrique égale ( $e = 1,602176462 \times 10^{-19}$  Coulomb). La valeur de l'énergie constituant la masse au repos de l'électron ou du positon en mégaelectronvolts (0,511 MeV) est obtenue en divisant la valeur de la masse en joules par la valeur de la charge unitaire invariante de l'électron ( $8,18710414 \times 10^{-14} \div 1,602176462 \times 10^{-19} = 0,5109989027$  MeV).

Le processus de découplage des photons implique le transfert de la moitié momentum

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatale

de l'énergie de ce photon électromagnétique dans la même orientation transverse que son autre moitié, tel que décrit avec les Équations (17) ou (19), avec une longueur d'onde ( $\lambda$ ) égale à la moitié de la longueur d'onde Compton de l'énergie de la *masse au repos* de l'électron ( $\lambda_c=2.426310215E-12$  mètre) qui caractérise déjà la moitié de l'énergie du photon qui oscille électromagnétiquement.

Les deux équations LC décrivant les particules massives découplées – un électron et un positon – ont été formellement publiées en 2013 dans la Référence [26].

Pour la *masse au repos* du positon :

$$E \vec{\theta} = m_e c^2 \vec{\theta} = \left[ \frac{hc}{2\lambda_c} \right]_Y \vec{\mathbf{J}} \vec{\mathbf{i}} + \left( 2 \left[ \frac{(e')^2}{4C_c} \right]_X (\vec{\mathbf{I}} \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{I}} \vec{\mathbf{j}}) \cos^2(\omega t) + \left[ \frac{L_c i_c^2}{2} \right]_Z \vec{\mathbf{K}} \sin^2(\omega t) \right) \quad (24)$$

Et pour la *masse au repos* de l'électron:

$$E \vec{\theta} = m_e c^2 \vec{\theta} = \left[ \frac{hc}{2\lambda_c} \right]_Y \vec{\mathbf{J}} \vec{\mathbf{i}} + \left( 2 \left[ \frac{(e')^2}{4C_c} \right]_X (\vec{\mathbf{I}} \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{I}} \vec{\mathbf{j}}) \cos^2(\omega t) + \left[ \frac{L_c i_c^2}{2} \right]_Z \vec{\mathbf{K}} \sin^2(\omega t) \right) \quad (25)$$

Dans le même article, l'équation équivalente utilisant les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  correspondants pour la *masse au repos* de l'électron a également été proposée, mentionnant que l'équation équivalente pour le positon était identique, à l'exception de l'orientation de son vecteur unitaire mineur de l'espace Y électrostatique [ $\mathbf{J} \vec{\mathbf{i}}$  pour le positon et  $\mathbf{J} -\vec{\mathbf{i}}$  pour l'électron, comme dans les Équations (24) et (25)] :

$$m_e c^2 \vec{\theta} = \left[ \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} v \right]_Y \vec{\mathbf{J}} \vec{\mathbf{i}} + \left[ 2 \left( \frac{\epsilon_0 v^2}{4} \right)_X (\vec{\mathbf{I}} \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{I}} \vec{\mathbf{j}}) \cos^2(\omega t) + \left( \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right)_Z \vec{\mathbf{K}} \sin^2(\omega t) \right] v \quad (26)$$

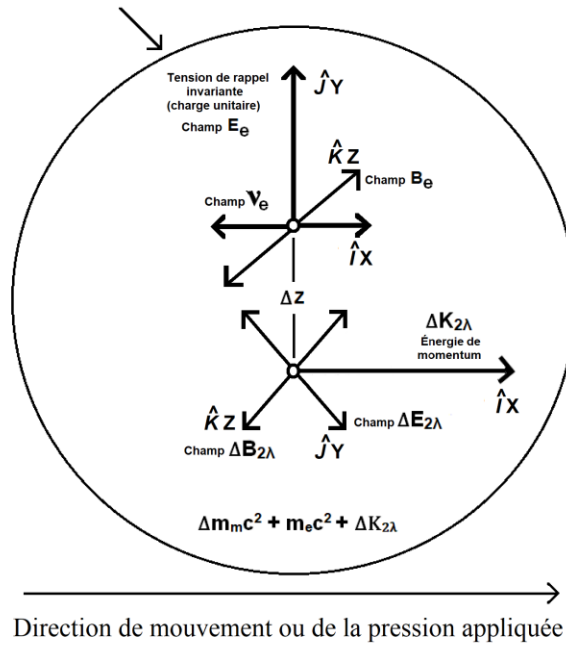
Le vecteur  $\theta$  lié à l'énergie totale de chaque particule massive fait référence au fait que toute l'énergie de la *masse au repos* invariante de l'électron et du positon est physiquement orientée perpendiculairement à l'*espace normal* X, ce qui signifie qu'aucune énergie de sa *masse au repos* n'est disponible pour la propulser dans l'*espace normal*, ce qui est directement lié à la découverte de Schrödinger mentionnée précédemment, selon laquelle la composante  $\Psi_{(r, t)}$  de son équation d'onde (2) devait en quelque sorte être orientée perpendiculairement à sa direction de mouvement, que l'on supposait alors être le long de la trajectoire de Bohr dans l'atome de Bohr à l'état fondamental, ce qui était établi dans son équation par l'utilisation du *vecteur unitaire pivoté perpendiculairement*  $\vec{\mathbf{i}} = \sqrt{-1} = 1 \angle 90^\circ$ .

L'analyse et la description de la composante énergie *neutrinique* du terme  $(\ )_X$  des Équations (24), (25) et (26) sont fournies dans la Référence [38].

Tel que mis en perspective aux Références [13] [14] et illustré par la **Figure 14**, un photon-porteur tel que décrit par les Équations (17) et (19) doit être associé à la *masse au repos* de l'électron ou du positon pour qu'ils puissent se déplacer dans l'espace normal.

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatiale

Champ magnétique composite oscillant de l'électron en mouvement

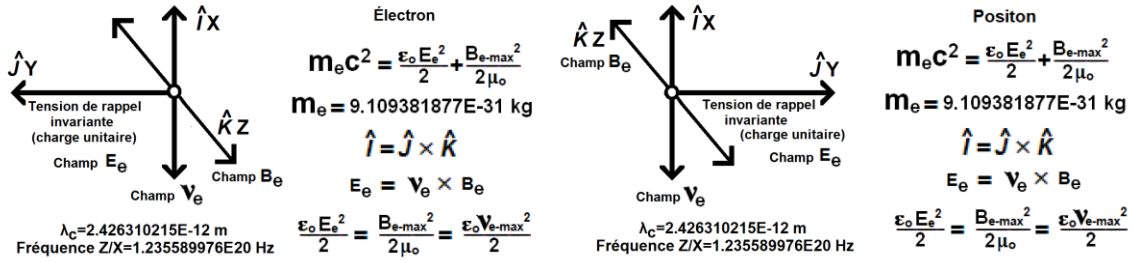


**Figure 14:** Complexe vectoriel trispatial de la *masse relativiste* de l'électron en mouvement et de son énergie de momentum.

Tel que mis en perspective dans les Références [13] [14], c'est l'énergie de momentum  $\Delta K$  fournie par ce photon-porteur que l'Équation (1) de de Broglie et l'Équation (2) de Schrödinger permettent de calculer pour chaque orbitale permise de l'atome d'hydrogène, correspondant au concept d'*onde pilote* introduit par de Broglie, qui permet à la particule de se déplacer dans l'espace normal.

Comme toutes les autres équations LC et  $E/B$ , y compris celles décrivant les sous-composants internes collisionnables des protons et des neutrons [32], établies dans le contexte de la géométrie trispatiale, les Équations (24), (25) et (26) décrivant la *masse au repos* des électrons et des positons peuvent être reformulées pour relier leurs complexes vectoriels locaux à l'origine  $\mathbf{0}$  – ou à l'emplacement de jonction  $ds$  ou  $dV$  coïncidant avec leurs *centres-de-présence* – de chacun de leurs systèmes de coordonnées trispatiales locaux (**Figure 11b**), comme cela a été fait avec l'Équation (21) pour les deux Équations (17) et (19), et comme illustré par leurs représentations dans la **Figure 15**, dans laquelle le *vecteur de tension de charge* de l'électron est orienté vers la gauche par convention pour représenter sa direction d'application négative, tandis que le *vecteur de tension de charge* du positon est orienté vers la droite pour représenter sa direction d'application positive [26] [13] [14].

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatale

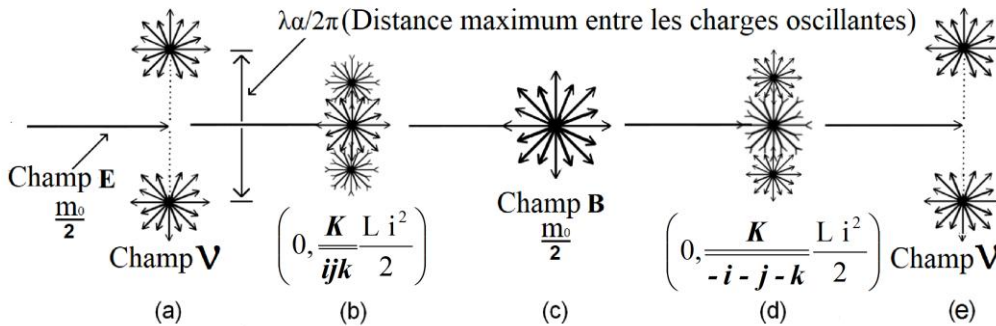


**Figure 15:** Complexes vectoriels trispaciaux des masses invariantes au repos de l'électron et du positon.

La géométrie trispatale jette immédiatement une lumière nouvelle sur la question du signe des charges électriques, étant donné qu'elles "vivraient" désormais dans un espace Y séparé, tel qu'analysé dans les références [39] [40]. La charge électrique des particules élémentaires peut désormais être représentée comme un vecteur de signe négatif, positif ou nul dans l'espace Y. La charge de l'électron équivaudrait alors à une *pression de momentum invariante* dans la direction négative le long de l'axe Y-x, celle du positon à une *pression de momentum invariante* dans la direction positive le long du même axe Y-x, et le signe nul des charges des demi-photons de de Broglie deviendrait explicable par ces charges variables de signes opposés oscillant dans des directions opposées sur le plan Y-y/Y-z perpendiculairement à l'axe Y-x, plan dans lequel elles sont polarisables dans n'importe quelle direction autour de l'origine **0**, tel qu'il est mis en perspective dans les Références [10] [11].

L'aspect de la tension de rappel des charges invariantes des électrons et des positons par rapport à la force de rappel de Coulomb est analysé dans les Références [13] [14]. Les charges fractionnaires des sous-composants internes collisionnables des protons et des neutrons sont analysées dans la Référence [32].

En comparant attentivement la **Figure 13**, qui représente l'oscillation transversale stationnaire des photons électromagnétiques ou des photons-porteurs, avec la **Figure 16**, qui représente l'oscillation transversale stationnaire de l'énergie de *masse au repos* de l'électron ou du positon, on observe que alors que la moitié de l'énergie du photon oscille entre l'état de champ **E** à double-particule dans l'espace Y et l'état de champ **B** à composante unique dans l'espace Z, la moitié de l'énergie de l'électron ou du positon oscille plutôt entre l'état de champ **v** à double-particule dans l'espace X et l'état de champ **B** à composante unique dans l'espace Z.





**Figure 16:** Représentation de l'oscillation cyclique de la moitié de l'énergie de masse au repos de l'électron entre son état magnétique  $\mathbf{B}$  et son état de double-charge neutrinique  $\nu$ , tandis que l'autre moitié constitue l'énergie invariante de son champ  $\mathbf{E}$ .

La même configuration magnétique vectorielle ( $\mathbf{K}/ijk$ ) plus ( $\mathbf{K}/-i-j-k$ ) que pour le photon électromagnétique (**Figure 13**), représentant les phases d'expansion et de régression sphériques de la composante magnétique de l'énergie de l'électron, peut être observée dans l'équation (26) et la **Figure 16**. Cette relation entre le comportement de la phase d'oscillation magnétique de l'électron et le spin de l'électron a été découverte à la suite de l'expérience réalisée en 1998 et analysée dans la Référence [26], qui a déclenché le développement de la géométrie trispatiale. L'analyse de l'établissement mécanique de la liaison moléculaire covalente, du remplissage des orbitales électroniques par des paires d'électrons, de la génération de paires de Cooper et de l'interprétation de l'expérience de Stern-Gerlach a été publiée dans la référence [14].

Tel que déjà mentionné, en comparant les **Figures 13** et **16** aux équations LC correspondantes - Équation (17) pour la **Figure 13** et Équations (24) et (25) pour la **Figure 16** – on peut observer que si l'énergie du photon oscille entre l'espace Y et l'espace Z, celle des particules massives électron et positon oscille entre l'espace X et l'espace Z, tel qu'analysé et mis en perspective dans la Référence [26].

C'est ce qui attire l'attention sur le produit vectoriel croisé de l'équation (14), comme l'illustre la **Figure 9a**, qui structure l'Équation (17) de sorte que le produit croisé des vecteurs unitaires majeurs  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  entraîne l'orientation de la pression du vecteur unitaire de momentum du photon vers son *centre-de-présence* au lieu de le diriger en sens opposé, afin de rendre compte correctement du fait que le vecteur d'énergie de momentum lié au vecteur unitaire majeur résultant  $\mathbf{I}=-\mathbf{I}$  applique maintenant sa pression contre le *centre-de-présence* de la particule pour la propulser à la vitesse de la lumière dans le vide dans le cas des photons électromagnétiques, une vitesse de la lumière due au fait que la quantité d'énergie propulsée est *toujours exactement égale par symétrie* à la quantité d'énergie de propulsion, tel que démontré mathématiquement dans la Référence [41].

L'examen des équations (24) et (25) révèle que dans le cas des particules massives, subordonné au vecteur unitaire majeur  $\mathbf{J}$  de l'espace Y, c'est plutôt le produit croisé des vecteurs unitaires mineurs  $\mathbf{Jj}$  et  $\mathbf{Jk}$  qui est impliqué, ce qui a pour résultat que le vecteur unitaire mineur de momentum  $\mathbf{Ji}$  – sur le plan Y-y/Y-x dans l'espace Y – de l'électron et du positon, est orienté dans des directions opposées, appliquant une pression vers l'espace X normal pour le positon et appliquant une pression s'éloignant de l'espace normal pour l'électron. Dans la géométrie trispatiale, c'est cette pression invariante exercée dans des directions opposées vers ou s'éloignant de l'espace X normal qui est mesurée comme étant les charges invariantes et opposées de l'électron et du positon. La pression exercée par les charges fractionnaires des sous-composants collisionables des protons et des neutrons est analysée dans la Référence [32].

## 10. Au delà de la fission et de la fusion des noyaux atomiques

La géométrie trispatiale a également permis d'envisager la possibilité de générer des niveaux d'énergie bien supérieurs à ceux de la fusion des noyaux atomiques, tel qu'analysé dans les Références [42] [43] [44], en identifiant des moyens mécaniques par

## *Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatiale*

lesquels des neutrons et des protons pourraient potentiellement être produits en faisant interagir des triades d'électrons et de positons suffisamment thermiques à proximité suffisante pour qu'ils se capturent mutuellement dans des triades  $e^+ e^+ e^-$  et  $e^- e^- e^+$ , avec une énergie insuffisante pour échapper à leur interaction mutuelle, tel que décrit dans la Référence [32].

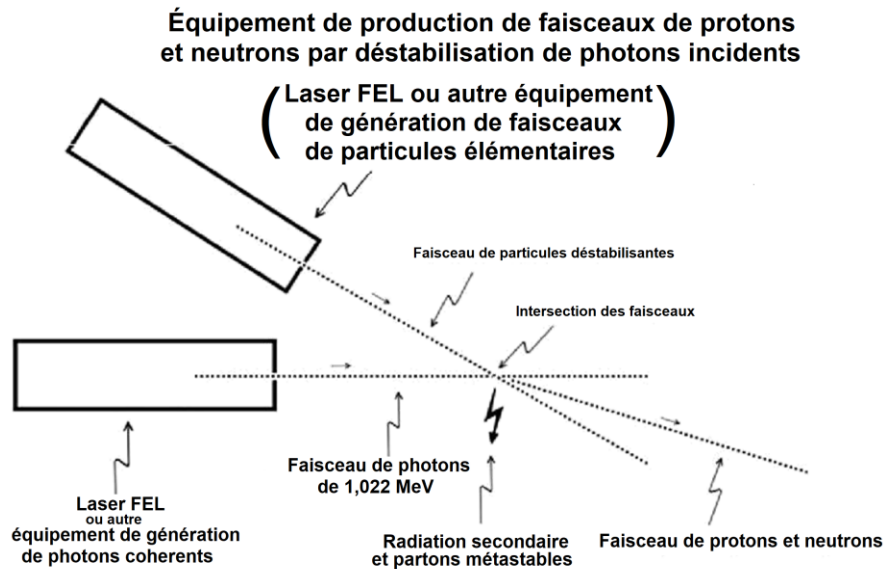
D'après les conclusions tirées de l'analyse de la formation de ces triades dans la référence [32], il est apparu que les trois sous-composants collisionables et chargés des protons et des neutrons pourraient simplement être des électrons et des positons très normaux dont les caractéristiques de masse et de charge ont simplement été altérées par l'intensité de l'environnement électromagnétique dans lequel ils se stabilisent lorsqu'ils atteignent leur état d'équilibre final, c'est-à-dire les niveaux d'énergie stables les plus intenses qui existent au niveau subatomique dans l'univers.

L'énergie nouvellement créée et libérée par chacune de ces occurrences de nucléogenèse s'élèverait à trois photons de bremsstrahlung de 155 MeV chacun, pour un total de 465 MeV, plus une augmentation de masse relativiste stable non libérable générée adiabatiquement de  $938 - 1,533 = 936,467 \text{ MeV}/c^2$ , pour un gain d'énergie total de 1401,467 MeV, soit 1 401 467 000 eV ou  $2,245E-10$  Joules [32], ce qui représente 34,35 millions de fois plus d'énergie que les 40,8 eV obtenus par l'accélération adiabatique irréversible initiale d'un électron nouvellement créé vers l'orbitale de moindre action d'un atome d'hydrogène [42] [43].

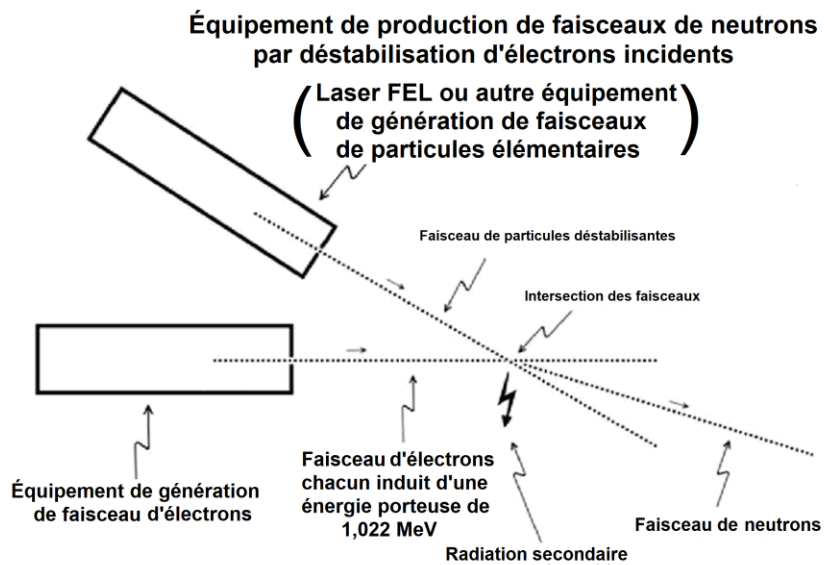
Pour s'assurer à l'époque que cette possibilité demeurerait documentée en permanence dans les archives officielles, il a été décidé en 2015 d'enregistrer une demande PCT auprès de l'*Organisation mondiale de la propriété intellectuelle* (OMPI) pour évaluation, et d'appliquer pour des brevets au Canada et aux États-Unis relativement aux moyens potentiels identifiés de parvenir à une telle génération de nucléons, même si ces possibilités étaient trop éloignées des théories physiques établies actuelles pour être acceptés.

Par conséquent, ces procédés, sommairement décrits dans les **Figures 17, 18 et 19**, sont désormais dans le domaine public et leur description et justification complètes sont désormais disponibles en permanence sur le site de l'OMPI, ainsi que dans les bases de données sur les brevets du Canada et des États-Unis [45] [46] [47], à la disposition de toute personne souhaitant les étudier et éventuellement les utiliser.

*Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatale*

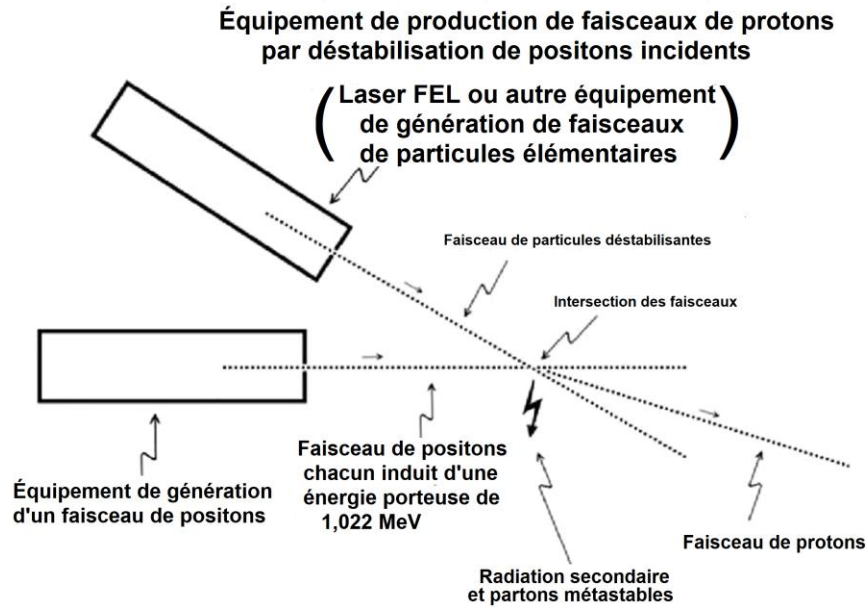


**Figure 17:** Illustration schématique d'un équipement de génération de faisceaux de particules permettant de générer des protons et des neutrons à partir de la déstabilisation de photons ayant chacun une énergie de 1,022 MeV.



**Figure 18:** Illustration schématique d'un équipement de génération de faisceau de particules pour générer des neutrons à partir de la déstabilisation d'électrons ayant chacun une énergie porteuse de 1,022 MeV.

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatale



**Figure 19:** Illustration schématique d'un équipement de génération de faisceaux de particules pour générer des protons à partir de la déstabilisation de positons ayant chacun une énergie porteuse de 1,022 MeV.

## 11. Conclusion

En ce qui concerne l'Équation (2) de Schrödinger, on peut observer que l'utilisation de nombres complexes pour rendre compte de l'orientation perpendiculaire de l'énergie de la *masse au repos* de l'électron sur le *plan complexe* 2D par rapport à sa direction supposée de mouvement le long de la trajectoire moyenne de Bohr représente correctement l'Équation (1) non relativiste de de Broglie, étant donné que la *masse au repos* classique de l'électron était perçue à cette époque comme n'ayant pas de structure interne, tel qu'analysé dans la Référence [48], et que sa représentation par la quantité unique représentée par  $\Psi_{(r,t)}$  oscillant harmonieusement à la distance moyenne du rayon de Bohr rendait correctement compte de la nature non relativiste de l'équation originale de de Broglie. L'équation de Schrödinger a finalement été élevée au rang d'équation relativiste par Dirac.

En ce qui concerne l'utilisation des *nombres complexes* dans l'analyse des circuits électroniques à commande sinusoïdale, impliquant typiquement des systèmes RLC ou LC, composés de bobines de fil et de condensateurs, nous avons observé que l'orientation vectorielle des composantes L et C de ces systèmes peut être correctement représentée sur le *plan complexe* par rapport à l'*axe réel*, puisque L et C sont représentés comme perpendiculaires à la direction de l'axe réel dans le *plan complexe* 2D, mais qu'il n'est pas possible de les représenter autrement qu'en opposition de  $180^\circ$  (**Figure 8a**), contrairement à leur orientation vectorielle mutuelle de  $90^\circ$  connue dans la théorie électromagnétique, qui peut être mieux représentée dans le *système de coordonnées du quaternion* 3D (**Figure 8b**).

## Évolution du plan complexe jusqu'à la géométrie trispatale

Avec cette analyse du plan complexe 2D illustré par la **Figure 3**, nous retrouvons la conclusion de Vessel selon laquelle dans le nombre complexe  $a+ib$ ,  $i=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  est en réalité un *vecteur unitaire dirigé* de magnitude 1 qui fait pivoter la direction de la magnitude de  $b$  de  $90^\circ$  par rapport à l'orientation relative de la magnitude  $a$ .

L'analyse de l'*hypersphère* du quaternion illustrée par la **Figure 4** montre que chaque vecteur unitaire des ensembles de *vecteurs unitaires dirigés* 3D  $i=j=k=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  et  $i^2=j^2=k^2=-1=1\angle 180^\circ$  a les mêmes propriétés de rotation par rapport aux *plans complexes* 2D établi par chacun des deux autres *vecteurs unitaires dirigés* du même ensemble de 3 vecteurs et par rapport à la grandeur  $a$  dans le *nombre hypercomplexe*  $a + bi + cj + dk$ .

Lorsque nous isolons le complexe de *vecteurs unitaires dirigés* 3D  $i=j=k=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  du quaternion et que nous l'analysons plus en détail, nous observons que  $i^2=j^2=k^2=-1=1\angle 180^\circ$  est l'équivalent exact de l'ensemble de *vecteurs unitaires cartésiens* 3D traditionnels  $i=j=k=1$ , dans lequel  $\angle \theta$  est indéterminé, mais que la multiplication d'un vecteur cartésien par  $-1$  inverse également de  $180^\circ$  la direction d'application du vecteur cartésien.

Cela signifie que fondamentalement, les *vecteurs unitaires cartésiens* 3D traditionnels  $i=j=k=1$  qui sont perpendiculaires seulement *par définition* les uns aux autres pourraient être potentiellement remplacés par l'ensemble de *vecteurs unitaires complexes*  $i=j=k=\sqrt{-1}=1\angle \theta=|1|$  dans lequel les *vecteurs unitaires* sont perpendiculaires *par structure* les uns aux autres et dans lequel  $|1|$  est la longueur absolue de tous les *vecteurs unitaires*, qui peuvent prendre des valeurs de rotation angulaire qualifiées  $|1|=1\angle \theta=1\angle 0^\circ$  ou  $|1|=1\angle \theta=1\angle 90^\circ$  ou  $|1|=1\angle \theta=1\angle 180^\circ$ , ou demeurer non spécifiés avec valeur par défaut  $|1|=1$  en fonction des exigences mathématiques contextuelles, avec par défaut  $|1|=1=1\angle 0^\circ$ , en accord avec l'ensemble 3D traditionnel des *vecteurs unitaires cartésiens*  $i=j=k=1$ .

L'intérêt de cette approche serait que l'inversion de la direction d'application du troisième vecteur d'un produit vectoriel croisé en mécanique électromagnétique tel que représenté par les Équations (14), (15) et (16), liées aux configurations vectorielles des **Figures 9a, 9b** et **9c**, deviendrait une possibilité mathématique actuellement absente de notre coffre à outils mathématique si l'ensemble de *vecteurs unitaires*  $i=j=k=\sqrt{-1}=1\angle \theta=|1|$  qui sont mutuellement perpendiculaires *par structure* était utilisé en mécanique électromagnétique au lieu des vecteurs unitaires cartésiens 3D actuels  $i=j=k=1$  qui sont perpendiculaires l'un à l'autre uniquement *par définition*.

## References

- [1] Renou, MO., Trillo, D., Weilenmann, M. *et al.* (2021) *Quantum theory based on real numbers can be experimentally falsified*. *Nature* **600**, 625–629 (2021).  
<https://doi.org/10.1038/s41586-021-04160-4>.  
<https://www.nature.com/articles/s41586-021-04160-4>
- [2] Ming-Cheng Chen, Can Wang, *et al.* (2022) *Ruling Out Real-Valued Standard Formalism of Quantum Theory*. *Phys. Rev. Lett.* 128, 040403 – Published 24 January 2022. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.128.040403>.  
<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.128.040403>
- [3] Padavic-Callaghan, K. (2022) *Complex numbers are essential in quantum theory, experiments reveal*. *Quantum Mechanics*. Research update. 11 Jan 2022.  
<https://physicsworld.com/a/complex-numbers-are-essential-in-quantum-theory-experiments-reveal/>
- [4] Nahim, P.J. (1998). *An Imaginary Tale – The Story of  $\sqrt{-1}$* . Princeton University Press. New Jersey.
- [5] Danielewski, M. and Sapa, L. (2020) Foundations of the Quaternion Quantum Mechanics. *Entropy* **2020**, 22(12), 1424; <https://doi.org/10.3390/e22121424>.  
<https://www.mdpi.com/1099-4300/22/12/1424>
- [6] Graydon, M. (2011) Quaternions and Quantum Theory. UWSpace.  
<http://hdl.handle.net/10012/6168>.  
[https://uwspace.uwaterloo.ca/bitstream/handle/10012/6168/Graydon\\_Matthew.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://uwspace.uwaterloo.ca/bitstream/handle/10012/6168/Graydon_Matthew.pdf?sequence=1&isAllowed=y).
- [7] Dunning-Davies, J. and Norman, R. (2020) *Deductions from the Quaternion Form of Maxwell's Electromagnetic Equations*. *Journal of Modern Physics*, **11**, 1361-1371. doi: [10.4236/jmp.2020.119085](https://doi.org/10.4236/jmp.2020.119085).  
<https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=102987>
- [8] Hong, I.K. and Kim, C.S. (2019) *Quaternion Electromagnetism and the Relation with 2-Spinor Formalism*. arXiv:1902.09773v2 [physics.class-ph].  
<https://arxiv.org/pdf/1902.09773.pdf>.
- [9] Sears, F., Zemansky, M. and Young, H. (1984) *University Physics*, 6th Edition, Addison Wesley.
- [10] Michaud, A. (2016) *On De Broglie's Double-particle Photon Hypothesis*. *J Phys Math* 7: 153. doi:10.4172/2090-0902.1000153.  
<https://www.hilarispublisher.com/open-access/on-de-broglies-doubleparticle-photon-hypothesis-2090-0902-1000153.pdf>
- [11] Michaud, A. (2021) *De Broglie's Double-Particle Photon*. In: Dr. Jelena Purenovic, Editor. *Newest Updates in Physical Science Research* Vol. 4, 63–102.  
<https://doi.org/10.9734/bpi/nupsr/v4/1979F>  
<https://stm.bookpi.org/NUPSR-V4/article/view/1642>
- [12] Resnick, R., Halliday, D. (1967) *Physics*. John Wiley & Sons, New York.

- [13] Michaud, A. (2023) *Introduction to Synchronized Kinematic and Electromagnetic Mechanics*, Journal of Modern Physics, **14**, 876-932. doi: [10.4236/jmp.2023.146051](https://www.scirp.org/pdf/jmp_2023053016192489.pdf). [https://www.scirp.org/pdf/jmp\\_2023053016192489.pdf](https://www.scirp.org/pdf/jmp_2023053016192489.pdf)
- [14] Michaud, A. (2023) *Electromagnetic and Kinematic Mechanics Synchronized in their Common Vector Field: A Mathematical Relation*, Journal of Modern Physics, **14**, 876-932. doi: [10.4236/jmp.2023.146051](https://www.scirp.org/pdf/jmp_2023053016192489.pdf). [https://www.scirp.org/pdf/jmp\\_2023053016192489.pdf](https://www.scirp.org/pdf/jmp_2023053016192489.pdf)
- [15] De Broglie, L. (1925) *Recherche sur la théorie des quanta*, Annales de Physique, Masson & Cie, Éditeurs. Paris. <https://theses.hal.science/file/index/docid/47078/filename/tel-00006807.pdf>
- [16] De Broglie, L. (2021) *Research on the Theory of Quanta*, Minkowski Institute Press. Edited by Vesselin Petkov. Montreal. Canada. <https://www.amazon.ca/Research-Theory-Quanta-Louis-Broglie/dp/1927763983?asin=1927763983&revisionId=&format=4&depth=1>
- [17] Schrödinger, Erwin (1982). *Collected Papers on Wave Mechanics (3rd ed.)*. American Mathematical Society. [ISBN 978-0-8218-3524-1](https://www.amazon.ca/Collected-Papers-on-Wave-Mechanics-3rd-ed-Erwin-Schrodinger/dp/0821835241).
- [18] Michaud, A. (2018) *The Hydrogen Atom Fundamental Resonance States*. Journal of Modern Physics, **9**, 1052-1110. doi: 10.4236/jmp.2018.95067. <https://www.scirp.org/journal/paperinformation.aspx?paperid=84158>
- [19] Michaud, A. (2020) *An Overview of The Hydrogen Atom Fundamental Resonance States*. In: Dr. Mohd Rafatullah, editor. *New Insights Into Physical Science Vol. 6*. West Bengal, India: Book Publisher International. 2020. <http://bp.bookpi.org/index.php/bpi/catalog/book/265>
- [20] Michaud, A. (2013) *On The Magnetostatic Inverse Cube Law and Magnetic Monopoles*. International Journal of Engineering Research and Development e-ISSN: 2278-067X, p-ISSN: 2278-800X. Volume 7, Issue 5. pp. 50-66. <http://www.ijerd.com/paper/vol7-issue5/H0705050066.pdf>
- [21] Eisberg, R., and Resnick, R. (1985) *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*. 2nd Edition, John Wiley & Sons, New York.
- [22] De Broglie, L. (1993) *La physique nouvelle et les quanta*, Flammarion, France 1937, 2nd Edition 1993, with new 1973 Preface by Louis de Broglie. ISBN: 2-08-081170-3.
- [23] Michaud, A. (2000) *On an Expanded Maxwellian Geometry of Space*. Proceedings of Congress-2000 – Fundamental Problems of Natural Sciences and Engineering. (2000) Volume 1, St.Petersburg, Russia, pages 291-310. [https://www.researchgate.net/publication/357527119\\_On\\_an\\_Expanded\\_Maxwellian\\_Geometry\\_of\\_Space](https://www.researchgate.net/publication/357527119_On_an_Expanded_Maxwellian_Geometry_of_Space)
- [24] Marmet, P. (2003) *Fundamental Nature of Relativistic Mass and Magnetic Fields*. International IFNA-ANS Journal, No. 3 (19), Vol. 9. Kazan State University. <http://www.newtonphysics.on.ca/magnetic/index.html>
- [25] Michaud, A. (2022) *Demystifying the Lorentz Force Equation*. Journal of Modern Physics, **Vol.13 No.5, May 2022**, DOI: [10.4236/jmp.2022.135046](https://doi.org/10.4236/jmp.2022.135046)



- [https://www.scirp.org/pdf/jmp\\_2022053015080692.pdf](https://www.scirp.org/pdf/jmp_2022053015080692.pdf)
- [26] Michaud, A. (2013) *The Mechanics of Electron-Positron Pair Creation in the 3-Spaces Model*. International Journal of Engineering Research and Development e-ISSN: 2278-067X, p-ISSN: 2278-800X. Volume 6, Issue 10. pp. 01-10.  
<http://ijerd.com/paper/vol6-issue10/F06103649.pdf>
- [27] Gélinas, R. & Lambert, M. (1988) *Éléments d'analyse complexe*. Presses de l'Université du Québec. Canada. ISBN 2-7605-0488-3.
- [28] Scherz, P. (2007) *Practical Electronics for Inventors – Second Edition*. McGraw Hill. New York.
- [29] Michaud, A. (2013) *On the Einstein-de Haas and Barnett Effects*, International Journal of Engineering Research and Development. e-ISSN: 2278-067X, p-ISSN: 2278-800X, www.ijerd.com Volume 6, Issue 12 (May 2013), PP. 07-11.  
<http://ijerd.com/paper/vol6-issue12/B06120711.pdf>
- [30] Einstein, A. (1905a) *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*. *Annalen der Physik*, vol. 17, n° 6, 1905, p. 132–148. (DOI [10.1002/andp.19053220607](https://doi.org/10.1002/andp.19053220607),  
<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1002/andp.19053220607>  
[http://users.physik.fu-berlin.de/~kleinert/files/eins\\_lq.pdf](http://users.physik.fu-berlin.de/~kleinert/files/eins_lq.pdf)
- [31] Anderson, C.D. (1933) *The Positive Electron*, California Institute of Technology, Pasadena, California (Received February 28, 1933).  
<https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.43.491>
- [32] Michaud, A. (2013) *The Mechanics of Neutron and Proton Creation in the 3-Spaces Model*. International Journal of Engineering Research and Development. e-ISSN: 2278-067X, p-ISSN : 2278-800X, Volume 7, Issue 9. pp. 29-53.  
<http://ijerd.com/paper/vol7-issue9/E0709029053.pdf>
- [33] Bodnarczuk, M.-W., Editor. (1988) *Reflections on the 15 Foot Bubble Chamber*. Fermi National Accelerator Laboratory Batavia, Illinois.  
<https://lss.fnal.gov/archive/misc/fermilab-misc-1988-01.pdf>
- [34] Michaud, A. (1999/2012). *Theory of Discrete Attractors*, SRP Books. Smashwords. ISBN: 9780988052727.  
<https://www.smashwords.com/books/view/159189>
- [35] Michaud, A. (2013) *The Expanded Maxwellian Space Geometry and the Photon Fundamental LC Equation*. International Journal of Engineering Research and Development, e-ISSN: 2278-067X, p-ISSN: 2278-800X. Volume 6, Issue 8, pp. 31-45.  
<http://ijerd.com/paper/vol6-issue8/G06083145.pdf>.
- [36] Michaud, A. (2021) *Our Electromagnetic Universe*. In: Dr. Mohd Rafatullah, Editor. *Newest Updates in Physical Science Research Vol. 12*. 23 July 2021, Page 64-82.  
<https://doi.org/10.9734/bpi/nupsr/v12/11459D>
- [37] Michaud, A. (2004) *Géométrie maxwellienne augmentée de l'espace*. 4<sup>e</sup> Édition. Les Éditions SRP. Smashwords. ISBN: 9782924175033.

- <https://www.smashwords.com/books/view/163704>
- [38] Michaud, A. (2013) *The Mechanics of Neutrinos Creation in the 3-Spaces Model*. International Journal of Engineering Research and Development. e-ISSN: 2278-067X, p-ISSN: 2278-800X. Volume 7, Issue 7, pp.01-08.  
<http://www.ijerd.com/paper/vol7-issue7/A07070108.pdf>
- [39] Michaud, A. (2017) *The Last Challenge of Modern Physics*. J Phys Math 8: 217. doi: 10.4172/2090-0902.1000217.  
<https://www.hilarispublisher.com/open-access/the-last-challenge-of-modern-physics-2090-0902-1000217.pdf>
- [40] Michaud, A. (2021) *The Last Challenge of Modern Physics: Perspective to Concept and Model Analysis*. In: Dr. Jelena Purenovic, Editor. Newest Updates in Physical Science Research Vol. 4, 1–29.  
<https://stm.bookpi.org/NUPSR-V4/article/view/1640>
- [41] Michaud, A. (2013) *From Classical to Relativistic Mechanics via Maxwell*, International Journal of Engineering Research and Development, e-ISSN: 2278-067X, p-ISSN: 2278-800X. Volume 6, Issue 4, pp. 01-10.  
[https://www.researchgate.net/publication/282353551\\_From\\_Classical\\_to\\_Relativistic\\_Mechanics\\_via\\_Maxwell](https://www.researchgate.net/publication/282353551_From_Classical_to_Relativistic_Mechanics_via_Maxwell)
- [42] Michaud, A. (2013) *Inside planets and stars masses*. International Journal of Engineering Research and Development. e-ISSN: 2278-067X, p-ISSN: 2278-800X. Volume 8, Issue 1, pp. 10-33.  
<http://ijerd.com/paper/vol8-issue1/B08011033.pdf>
- [43] Michaud, A. (2016) *On Adiabatic Processes at the Elementary Particle Level*. J Phys Math 7: 177. doi:10.4172/2090-0902.1000177.  
<https://projecteuclid.org/journals/journal-of-physical-mathematics/volume-7/issue-2/On-Adiabatic-Processes-at-the-Elementary-Particle-Level/10.4172/2090-0902.1000177.full>
- [44] Michaud, A. (2021) *On Adiabatic Processes at the Subatomic Level*. In: Dr. Jelena Purenovic, Editor. Newest Updates in Physical Science Research Vol. 4, 30–62.  
<https://doi.org/10.9734/bpi/nupsr/v4/1978F>  
<https://stm.bookpi.org/NUPSR-V4/article/view/1641>
- [45] Michaud, A. (2015) WO2017041162 – *Neutron and Proton Generating processes*. International Application No. PCT/CA2016/000201. World Intellectual Property Organization (WIPO).  
<https://patentscope.wipo.int/search/en/detail.jsf?docId=WO2017041162&recNum=1&maxRec=&office=&prevFilter=&sortOption=&queryString=&tab=PCT+Biblio>
- [46] Michaud, A. (2018) *Patent application CA 2997508 for Neutron and Proton Generating Processes*. Canadian Patent Database.  
[https://www.ic.gc.ca/opic-cipo/cpd/eng/patent/2997508/summary.html?type=number\\_search&tab1Index=tab1\\_1](https://www.ic.gc.ca/opic-cipo/cpd/eng/patent/2997508/summary.html?type=number_search&tab1Index=tab1_1)

- [47] Michaud, A. (2018) *Patent application US-20180261348-A1 - Neutron and proton generating processes*. United States Patent Application Publication.  
<https://ppubs.uspto.gov/dirsearch-public/print/downloadPdf/20180261348>
- [48] Michaud, A. (2020) *Gravitation, Quantum Mechanics and the Least Action Electromagnetic Equilibrium States*. In: Amenosis Lopez, editor. Prime Archives in Space Research. Hyderabad, India: Vide Leaf. 2020.  
<https://videleaf.com/gravitation-quantum-mechanics-and-the-least-action-electromagnetic-equilibrium-states/>