the general science journal

Description Entropique de la Gravité par la Thermodynamique des Fluides Relativistes et par la Théorie de l'Information

Roman Baudrimont
Chercheur Indépendant
RomanBaudrimont.cd@gmail.com

Abstrat : Le but de ce papier est de montrer une nouvelle approche d'unification entre la théorie de la relativité générale et la physique quantique. Pour cela, nous nous basons sur la thermodynamique, la mécanique des fluides ainsi que la théorie de l'information. Nous verrons alors que l'entropie de Shannon, de Boltzmann et de Von Neumann peuvent être la source de la gravité, qui serait alors qu'une forme émergeante. Pour cela, nous étudieront dans un premier temps ce qui fait défaut à l'unification de la relativité générale et de la physique. Dans un second temps, nous expliquerons le concept de gravité entropique en introduisant les calculs d'Erik Verlinde. Ensuite, nous expliquerons le concept de l'entropie de Boltzmann, Shannon, Von Neumann et les liens qui les unissent. Puis, nous modifierons les équations d'Einstein en transformant le tenseur des fluides parfait en fonction de l'entropie. Enfin, nous ferons le lien de notre théorie avec une expérience déjà réalisé dans le cadre d'un lien entre gravité et théorie quantique.

Keys word : Holography, Quantum Gravity, General Relativity

1 Les difficultés de formalisation de la gravité quantique.

La relativité générale [1, 2] est une théorie de la gravitation : Ecrite par Einstein entre 1907 et 1915, elle stipule que l'attraction gravitationnelle jusqu'alors connue par l'équation de Newton est en fait une déformation de l'espace-temps provoquée par des concentrations d'énergie. Elle est décrite, de façon simplifiée, par cette équation :

$$G_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

Il s'agit d'une équation tensorielle. $8\pi G/c^\wedge 4$ est une constante, le tenseur T_{ij} est le tenseur d'énergie d'impulsion relativiste (une matrice 4×4) déduite du tenseur énergie impulsion de fluide parfait aussi appelé tenseur des contraintes (une matrice 3×3), noté :

$$T_{ij} = \left(\frac{P}{c^2} + \rho\right) u_i u_j - P g_{ij}$$

Où P la pression, ρ la masse volumique, $u_i u_j$ un quadrivecteur, et g_{ij} le tenseur métrique. G_{ij} définit finalement la courbure que prend l'espace compte tenu d'une certaine constante bien précise et du tenseur énergie impulsion.

La physique quantique [3] est radicalement différente de la physique classique ainsi que de la relativité. En effet, elle est probabiliste : l'évolution d'un système physique est défini par la fonction d'onde calculable à partir de l'équation de Schrödinger. Et l'un des principes fondamentaux de la physique quantique est le suivant : tant qu'un système quantique n'a pas été mesuré, son état est indéfini. L'équation de Schrödinger est la suivante :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \hat{H}\psi(\vec{r},t)$$

Avec $\hat{H}$, l'opérateur Hamiltonien :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r},t)$$

On remarque que l'Hamiltonien donne l'énergie total du système avec $\hbar$ la constante de Planck réduite correspondant à l'impulsion, $-\hbar^2\Delta/(2m)$ correspond donc à l'énergie cinétique, $V(\vec{r},t)$ à l'énergie potentielle du système. Le delta (Δ) est un Laplacien. Cette équation est une équation de premier ordre par rapport au temps. Donc si on connaît l'état du système à l'instant initial, on peut connaître l'état du système à tout instant t.

Enfin l'autre principe fondamental de la physique quantique est le principe d'incertitude de Heisenberg :

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Cette équation signifie simplement que l'on ne peut pas définir simultanément la position et l'impulsion avec une infinie précision.

La question principale est donc de comprendre l'origine de la gravitation. En effet, des « infinies » apparaissent à partir du moment où l'on veut mathématiser la gravitation dans les équations quantiques. Les théories quantiques de la gravitation sont donc non renormalisable. Alors, existe-t-il un autre formalisme permettant de normaliser la gravitation dans les équations quantiques ? La gravitation existe-elle au niveau quantique ? Et donc… quelle est l'origine de la gravitation ? Est-elle émergeante ?

Il s'agirait en fait de définir une mécanique « d'échelle » et statistique. En fait, le but est de passer d'un formalisme de très petite échelle (appelons-le l'échelle quantique), à un formalisme macroscopique (échelle thermodynamique avec notamment l'étude des gaz parfaits) à enfin un formalisme de grande échelle (l'échelle relativiste). Pour cela, un formalisme bien particulier sera nécessaire. Nous aurons besoins des formules de base en théorie de l'information et en thermodynamique.

La partie suivante traite du lien entre thermodynamique et gravitation. Un autre formalisme de la gravitation pourra ainsi naître.

2 Thermodynamique et gravitation : Vers une force de gravitation entropique.

Eric Verlinde [4, 5] publie en avril 2011 un document de 29 pages intitulé « On the Origin of the Gravity and The Laws of Newton » (de l'origine de la gravité et des lois de Newton). Il fut le premier à dire que la gravitation pouvait être décrite de façon entropique. Je vais détailler les calculs en prenant le cas d'un gaz contenu dans une boîte fermée placé sur un piston mobile, en sachant que le système est maintenu à une température T. Puisque la pression est la force exercée sur une surface, et en supposant que le gaz est parfait, on peut écrire :

$$F = \frac{NK_bT}{X}$$

Avec X la hauteur du piston. Le travail associé à une variation d'auteur dX est FdX. Il s'ensuit alors, compte-tenu du premier principe de thermodynamique que $dU = FdX + TdS$ avec S l'entropie du système. On peut alors écrire l'égalité suivante $dS = dU/T + FdX/T$ donnant finalement :

$$F = T\frac{\partial S}{\partial X} = \frac{NK_bT}{X}$$

Mais où est la force de gravitation ? Eh bien la gravitation en relativité générale est en fait une force de pression. Il s'agit d'une masse qui exerce une certaine « pression » sur une surface, l'espace-temps, entraînant ainsi sa courbure. Et puis rappelons un des principes de l'entropie : l'entropie d'un système de deux particules est d'autant plus élevée que les particules sont proches. Cet énoncé est semblable à celui de la force de la gravitation : plus deux objets sont proches, plus la force de gravitation est forte. On en déduit alors, avec m et M deux masses distinctives, ainsi que R la distance séparant ces deux masses, la formule suivante :

$$T\frac{\partial S}{\partial X} = G\frac{mM}{R^2} = \frac{NK_bT}{X}$$

Il existe une autre manière d'avoir ce même résultat en partant de l'équation de l'énergie cinétique des gaz parfaits moyenne des molécules :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}K_bT$$

Si on écrit $v = \sqrt{2gh}$, on obtient l'énergie potentielle de pesanteur sur Terre, soit :

$$mgh = \frac{3}{2}K_bT$$

Au final, en mettant h de l'autre côté, nous avons :

$$G\frac{mM}{R^2} = \frac{3K_bT}{2h}$$

Ce qui est très semblable au résultat d'Éric Verlinde.

Ce qui est incroyable dans l'équation de Verlinde est que, en donnant une origine entropique à la gravité, on peut déduire les forces gravitationnelles macroscopiques sans rien dire de ce qui se passe à l'échelle microscopique. La parution de ce document a eu un grand émoi chez les scientifiques et de vives critiques, autant positives que négatives.

3 L'entropie et l'information.

Mais nous allons aller plus loin que cela. En effet, nous allons voir ce qu'est vraiment l'entropie et l'intégré dans la suite dans les équations d'Einstein.
Il existe diverses formes équationnelles de l'entropie, que nous allons voir de suite. La première est l'entropie utilisée ci-dessous, l'entropie de Boltzmann [6], qui s'écrit :

$$S(\Omega) = K_b \ln \Omega$$

Cette équation définit l'entropie microcanonique d'un système physique à l'équilibre macroscopique, mais laissée libre d'évoluer à l'échelle microscopique entre Omega (Ω) micro-états différents (appelé

aussi nombre de complexions, ou encore nombre de configuration du système). L'unité est en Joule par Kelvin (J/K).
L'entropie est le point clé du second principe de thermodynamique, qui énonce que « *Toute transformation d'un système thermodynamique s'effectue avec une augmentation de l'entropie globale incluant l'entropie du système et du milieu extérieur. On dit alors qu'il y a création d'entropie.* » ; « *L'entropie, dans un système isolé ne peut qu'augmenter ou rester constant* ».

Il existe aussi la formule de Shannon [7]. L'entropie de Shannon, due à Claude Shannon, est une fonction mathématique qui correspond à la quantité d'information contenue ou délivrée par une source d'information. Plus la source est redondante, moins elle contient d'information. L'entropie est ainsi maximale pour une source dont tous les symboles sont équiprobables. L'entropie de Shannon peut être vue comme mesurant la quantité d'incertitude liée à un événement aléatoire, ou plus précisément à sa distribution. Généralement, le logarithme sera en base 2 (base binaire). Sa formule est :

$$S(p) = \sum_i p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$$

On peut toutefois définir une entropie en théorie quantique [9] , notamment utilisée en cryptographie quantique (avec les propriétés de l'intrication), appelé l'entropie de Von Neumann noté :

$$H(\rho) = -\mathrm{tr}(\rho \log_2 \rho) = \sum_i p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$$

Avec ρ la matrice densité et $|a\rangle$ une base orthonormé :

$$\rho = \sum_i p_i \, |a\rangle\langle a|$$

L'entropie de Von Neumann est identique à celle de Shannon, sauf que celle-ci utilise la variable ρ, une matrice densité. Comme l'écrit Serge Laroche, cette équation peut servir à calculer le degré d'intrication de deux particules : si les deux particules ne sont pas intriquées, l'entropie est nulle. A l'inverse, si l'intrication entre les deux particules est maximales, l'entropie y est maximale, compte-tenu nous n'avons pas accès au sous-système. En mécanique classique une entropie nulle signifie que les évènements sont certains (une seule possibilité) alors qu'en mécanique quantique cela signifie que la matrice densité est un état pure de ψ. Mais en physique quantique les mesures sont en général non prévisible car la distribution de probabilité dépend de la fonction d'onde et de l'observable.
Et ceci s'explique aussi grâce au principe d'incertitude de Heisenberg : en effet, si par exemple on venait à avoir davantage d'information (donc moins d'entropie) sur l'impulsion de la particule, on a moins d'information sur la position de celle-ci (plus d'entropie). Cela implique que la physique quantique est toujours plongée dans l'entropie, même si cette entropique est faible.

Maintenant que nous connaissons l'entropie de Boltzmann et l'entropie de Shannon, on peut fusionner les deux ce qui donne l'entropie de Boltzmann-Shannon, ou entropie statistique [8]. Si on considère un système thermodynamique qui peut se trouver dans plusieurs états microscopiques i, de probabilités respectives p_i, l'entropie statistique s'écrit alors :

$$S(p) = K_b \sum_i p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$$

Ou encore, l'entropie de Boltzmann-Neumann, équivalente à l'équation ci-dessus :

$$S(\rho) = -K_b \mathrm{tr}(\rho \log_2 \rho)$$

Cette fonction est primordiale, et elle sera sans cesse utilisée dans notre théorie de la gravitation entropique. Son unité est le binaire et Joule par Kelvin. Citons quelques propriétés de cette fonction. On sait que l'entropie est maximale lorsque les nombres de molécules dans chaque compartiment sont égaux. L'entropie est minimale si toutes les molécules sont dans un seul compartiment. Elle vaut alors 0 puisque le nombre d'états microscopiques vaut 1.
Du point de vue de la théorie de l'information, le système thermodynamique se comporte comme une source qui n'envoie aucun message. Ainsi, l'entropie mesure « l'information qui manque » au récepteur (ou l'incertitude de la totalité de l'information).
Si l'entropie est maximale (les nombres de molécules dans chaque compartiment sont égaux) l'information manquante est maximale. Si l'entropie est minimale (les nombres de molécules sont dans un même compartiment), alors l'information qui manque est nul.
Au final, l'entropie de Shannon et l'entropie de Boltzmann représente le même concept.

Pour mieux comprendre la nécessité de relier l'information à la thermodynamique, il faut bien comprendre le champ d'influence de la théorie de l'information en physique et les problèmes qu'il pourrait résoudre. En effet, un exemple fort est le paradoxe de l'information : du point de vue de la relativité générale, une information peut totalement disparaître dans un trou noir. C'est un phénomène irréversible. Or, en physique quantique, l'information doit toujours être préservé, et elle est réversible (on peut connaître les états précédents).

4 L'Equation d'Einstein modifiée : proposition d'une forme thermodynamique compte tenu de la gravité entropique et de la théorie de l'information.

Nous avions écrit plus haut l'Equation d'Einstein simplifiée. Dans cette partie, nous allons calculer l'équation d'Einstein avec le tenseur énergie impulsion des fluides parfaits. Pour cela, il nous faudra calculer deux éléments : la pression et la densité volumique.

La pression peut s'écrire :

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{NK_BT}{V}$$

L'énergie m selon Erik Verlinde [4] est égale à $NK_BT/2$ Donc on peut calculer facilement la densité énergétique :

$$\rho c^2 = \frac{mc^2}{V} = \frac{E}{V} = \frac{NK_BT}{2V}$$

La partie entre parenthèse du tenseur énergie impulsion des fluides parfaits devient facile à résoudre :

$$\frac{P}{c^2} + \rho = \frac{P + \rho c^2}{c^2} = \frac{\frac{NK_BT}{V} + \frac{NK_BT}{2V}}{c^2} = \frac{3NK_BT}{2Vc^2}$$

Le tenseur énergie impulsion devient :

$$T_{ij} = \left(\frac{NK_BT}{V}\frac{3}{2c^2}\right)u_i u_j - \frac{NK_BT}{V} g_{ij}$$

Il ne reste plus qu'à factoriser :

$$T_{ij} = \frac{NK_BT}{V}\left(\frac{3u_iu_j}{2c^2} - g_{ij}\right)$$

Le tenseur énergie impulsion ainsi écrit dépend du tenseur métrique g_{ij}, du quadrivecteur u_iu_j mais surtout du volume V, du nombre de particules N et de la température T. En effet, lorsque la température augmente, l'énergie augmente, du fait notamment de l'augmentation de la vitesse de chaque particule. De plus, lorsque le nombre de particule est élevé, et qu'elles sont présentes dans un volume plus petit, la pression exercée sur les parois de ce même volume (par exemple une boite) augmente.

Il est alors de formaliser l'équation d'Einstein de la façon suivante :

$$G_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}\frac{NK_BT}{V}\left(\frac{3u_iu_j}{2c^2} - g_{ij}\right)$$

Maintenant, nous pouvons l'écrire en fonction de l'entropie statistique de Boltzmann-Shannon, ce qui donne :

$$G_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}\frac{NT}{V}\frac{S(p)}{-\sum_i p_i \log_2 p_i}\left(\frac{3u_iu_j}{2c^2} - g_{ij}\right)$$

Isolons l'entropie :

$$S(p) = \frac{c^4 G_{ij} V}{8\pi GNT}\sum_i p_i \log_2 \frac{1}{p_i}\left(\frac{3u_iu_j}{2c^2} - g_{ij}\right)^{-1}$$

Ce que l'on remarque est que cette fois-ci, l'équation d'Einstein est décrite directement de façon statistique par les lois de la thermodynamique. La gravitation redevient une force émergeante issue de l'échelle macroscopique.
En effet, si l'on se concentre sur l'implication de G_{ij} sur $S(p)$, nous remarquons que lorsque la courbure augmente, l'entropie augmente, et vice-versa. Il est donc possible que l'entropie influe sur la courbure de l'espace-temps, et de même, que la courbure de l'espace-temps influe sur l'entropie.
On peut formaliser l'équation d'Einstein de façon quantique. Il suffit pour cela d'utiliser l'entropie de Von Neumann.

$$S(\rho) = \frac{c^4 G_{ij} V}{8\pi GNT}\left(\frac{3u_iu_j}{2c^2} - g_{ij}\right)^{-1} \operatorname{tr}(\rho \log_2 \rho)$$

Le constat est le même que précédemment : la courbure de l'espace à une influence sur l'entropie. Toutefois, l'entropie est ici quantique. Cela veut dire que la moindre petite particule de l'espace a une influence sur l'espace-temps.

Pour bien vous le montrer, essayons de décortiqué cette équation. Prenons le cas de matière pure [10]. Le tenseur énergie impulsion d'un milieu continue s'écrira ainsi :

$$T_{ij} = \rho\, u_iu_j$$

Nous aurions alors une équivalence avec l'énergie sur un volume :

$$T_{ij} = \frac{NK_B T}{V}$$

Soit, avec G_{ij}, puis en fonction de l'entropie :

$$G_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}\frac{N}{V}\frac{S(p)}{-\sum_i p_i \log_2 p_i}$$

$$S(p) = \frac{c^4 G_{ij} V}{8\pi GNT}\sum_i p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$$

Si nous considérons que l'entropie est maximale, nous avons :

$$S(p) = \frac{c^4 G_{ij} V}{16\pi GNT}$$

En considérant qu'il y est qu'une seule particule et que les constantes sont supprimées, nous avons :

$$S(p) = \frac{G_{ij} V}{T}$$

$$G_{ij} = \frac{S(p)T}{V}$$

On constate alors que les variables principales définissant l'entropie est la courbure, la température et le volume. De même, les variables principales définissant la courbure est l'entropie, la température et le volume. Prenons par exemple une boite, numéroté 1 de taille l (soit $V_1 = l^3$), et une autre boite numéroté 2 de taille L (soit $V_2 = L^3$). Si nous déposons x particules, toutes ayant la même vitesse noté v, dans la boite de taille 1, nous pourrions calculer son entropie, qu'on notera S_1. Procédons de la même manière avec la boite numéro 2, et nous aurions une entropie noté S_2. On remarquera alors que si $l < L$, alors $S_1 < S_2$. En conclusion, plus le volume d'une boîte est petite, moins grande est l'entropie. Ceci est assez normal. Plus les particules ont d'espace pour circuler, plus grande est l'entropie, donc plus il est difficile d'obtenir des informations. L'incertitude est élevée. Si on concentre toutes ses particules dans un volume plus petit, l'entropie sera bien inférieure. Le volume joue donc un rôle central dans le calcul de l'entropie. Enfin, la température joue un rôle aussi central. Plus la température est élevée, plus la chaleur est élevée. L'énergie augmente, donc la courbure de l'espace augmente.

Maintenant, supposons que la température est le volume soit constant. Si on procède comme tout à l'heure, en supprimant chaque constante, nous aurions :

$$G_{ij} = S(p)$$

Cela veut dire que l'entropie à un effet direct sur la courbure, et vice-versa. Evidemment, cette équation est « fausse », puisque nous avons essayé de simplifier au maximum cette équation. Toutefois, cela est un nécessaire pour bien comprendre l'importance de l'entropie sur l'espace-temps.

Enfin, si la courbure était égal à 1 (surface plane), et que la température était constante, nous aurions :

$$S(p) = V$$

Cette formule indique simplement que l'entropie augmente ou diminue, lorsque le volume augmente ou diminue, comme nous l'avions expliqué précédemment.
Une petite remarque : cette équation est très proche de celle trouvée en théorie holographique, définissant une correspondance entre les trous noirs et l'entropie [11, 12, 13]. En effet, si nous supprimons toutes les constantes, nous avons :

$$S = \frac{K_B c^3 A}{4g\hbar} \rightarrow S = A$$

On peut supposer que l'information d'un système est contenue / enregistrée dans un volume, que nous avons noté V et non sur une surface comme le décrit les équations de la théorie holographique [13] ! L'information est contenue dans un volume de l'espace-temps.

5 Vers une gravité quantique.

Une expérience faite par Edward Bruschi et son équipe démontre qu'il existe bien un lien entre gravité et intrication [15, 16].

David Edward Bruschi, physicien à l'institut de physique quantique de Jérusalem à démontrer que l'intrication quantique affecte le champ gravitationnel. Les perturbations du champ gravitationnel sont proportionnelles à l'intensité de l'intrication entre les deux particules. Selon la distance des deux particules, de leur énergie, leur état de cohérence, de la force de la corrélation quantique, des effets perturbatifs de la métrique espace-temps émergent et altèrent le champ gravitationnel par de faibles perturbations. L'expérience était de mettre un condensat de Bose-Einstein dans lequel sont intriqués deux particules, les deux étant sur des orbites différentes et des vitesses différentes. Les auteurs cherchaient à savoir si la force de l'intrication peut être altérée par des variations d'intensité du champ gravitationnel. Pour cela, les deux microsatellites devait d'abord être satellisés sur la même orbite, puis l'un deux devait recevoir une poussée brutale qui le catapultera sur une seconde orbite, subissant une variation brusque de vitesse et de gravité. D'après les calculs et les simulations, les physiciens s'attendent à ce que l'intrication entre les deux condensats perde 20% de son efficacité. Un peu plus tard, cette expérience a été prouvée et l'intensité de l'intrication suit donc bien les mêmes variations que l'intensité du champ gravitationnel.

Que veut dire « intensité d'intrication » ? En fait cela désigne le degré de corrélation entre les deux particules. Et ce degré peut se calculer par l'entropie de Von Neumann. Selon les propriétés écrites dans un cours de Serge Haroche [17], Je cite : « *Il y a plus d'information (moins d'ignorance) dans une paire corrélée que dans la somme de ses parties (égalité si A et B ne sont pas corrélés)* » et « *Le degré d'intrication d'un système A-B apparaît comme la mesure de l'augmentation de notre ignorance lorsque nous perdons la possibilité de faire des mesures sur le système dans son ensemble et que nous n'avons accès localement qu'à l'un des deux sous-systèmes.* ».

6 Conclusion générale.

La gravitation est une force entropique émergeante et informationnelle. Elle est définie en fonction de l'entropie de Boltzmann-Shannon, et dans sa version quantique, de Boltzmann-Neumann. La gravité est d'autant plus forte que l'incertitude sur l'information du système est élevé.

Si on se penche sur l'équation d'Einstein en la résolvant avec le tenseur énergie impulsion des fluides parfaits et en prenant en compte la thermodynamique et la théorie de l'information, on remarque que l'entropie dépend principalement de la température du système, de la courbure de l'espace-temps et du volume. Il est alors supposé que l'information est enregistrée dans un volume d'espace-temps.

La théorie holographique dit que nous serions une projection d'un espace en 2 dimensions (la surface) en 3 dimensions. Je dirais plutôt, au sens de mon équation, que nous serions la projection en 3 dimensions de l'espace-temps, qu'importe le nombre de dimensions que celui-ci comporte. Cela est plus simple et aussi plus général : au final, on peut très bien être la projection en 3 dimensions d'un espace qui en fait 2 ou 3, ou 4 etc…

7 Bibliographie.

[1] Richard Taillet (2013), Podcast de l'université de Grenoble, relativité générale, épisode 11, *équation d'Einstein*

[2] Albert Einstein (1923), The Meaning of Relativity, Princeton Univ. Press

[3] Emmanuel Fromager, *Les outils mathématiques de la mécanique quantique*, Institut de Chimie de Strasbourg, Laboratoire de Chimie Quantique, CNRS, ECPM

[4] Eric Verlinde, (2010) *On the Origin of Gravity and the Laws of Newton*, arXiv:1001.0785v1

[5] David Lapeyre (2011), *La gravité, une force émergeante d'origine entropique*, Science Etonnante

[6] Boltzmann (1987), Leçons sur la théorie des gaz, trad. Fr. A. Galloti, Paris, Gabay

[7] C. E. Shannon (1948), *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech, J. 27, p. 379-423, 623-656

[8] Ricks Bradford (2008), *Entropy and Its Inqualities*, Formulation of Quantum Mechanics QM6

[9] Michel Le Bellac (2003), *Introduction à l'information quantique*, prétirage INLN, institut non linéaire de nice UMR 6638

[10] André Lichnebrowicz (1966), *Etude mathématique des fluides thermodynamiques relativistes*, collège de France, Commun. Math. Phys. 1, 328-373

[11] J.D. Bekeinstein, *Black holes and entropy*, Phys. Rev. D 7, 2333

[12] J.D. Bekenstein (1972), *Black Holes And The Second Law*, Lett. Nuovo Cim. 4, 737

[13] J.D. Bekeinstein, *Generalized second law of thermodynamics in black hole physics*, Phys. Rev D 9, 3292

[14] Leonard Susskind (1995), The World as a hologram, J. Math. Phys. 36, 6377, ArXiv:hep-th/9409089

[15] G. Vallone, D. Bacco, D. Decqual, S. Gaiarin, V. Luceri, G. Bianco, P. Villoresi (2014), Experimental Satellite Quantum Communications, ArXiv:1406.4051v1 [quant-ph]

[16] David Edward Bruschi (2015), On the weight of entanglement, Arxiv:1412.40007v2 [quant-ph]

[17] Serge Haroche (2002), *Mesure de l'intrication : Entropie de Shannon et Von Neumann*, Chaire de physique quantique, 5ème leçon, année 2001-2002