

Напряжение на клеммах дросселя с переменным числом ВИТКОВ

Арви Круусинг, Антс Таутс

Опубликовано 8 сентября 2020 года

В статье рассматривается взаимосвязь между током и напряжением на дросселе, количество витков (т.е. количество активных витков; индуктивность) адиабатно изменяют (изменяется). Показано, что в случае скачкообразного изменения индуктивности применена та же формула, которая была предложена для непрерывно изменяемой индуктивности, если временные ходы индуктивности, тока и напряжения приблизить гладкими функциями.

1. Введение

Дроссели с переменной/управляемой индуктивностью – это относительно новые компоненты, различным образом применяемые в преобразовательной техники, см., например [1, 2].

Если индуктивность изменяется непрерывно и без обмена энергии с внешней системой (адиабатно), то напряжение на клеммах дросселя выражается [3, 4]:

$$u(t) = L(t) \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{2} i(t) \frac{dL(t)}{dt}. \quad (1)$$

Так как в практике непрерывное варьирование индуктивности дросселя не целесообразно, вместо этого используется переключение его секций полупроводниковыми ключами (рис. 1). Теперь, однако, индуктивность и ток меняются скачкообразно; а напряжение на клеммах дросселя может содержать импульсы высокой амплитуды, что делает применение формулы (1) в практике проблематичным.

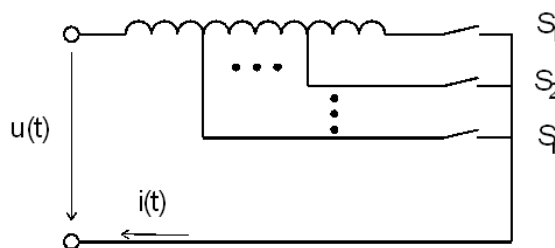


Рис. 1. Возможный вариант переключения количества активных витков дросселя.

В этой статье будет показано, что формула (1) также может быть применена в случае дискретного изменения индуктивности, если временные ходы индуктивности, тока и напряжения приблизить гладкими функциями.

* Под *дросселем* понимается любой индуктивный элемент: катушка, обмотки и т.д. Для дросселя с адиабатически варьированной индуктивностью, в следующем также используется наименование *переменный дроссель*.

2. Оригинальные выводы В. Сарва

В 1982 году Велло Сарв* представил две различные выводы формулы (1). Цитируем они здесь без объяснения; ход их нетрудно следовать. (Примечание: в оригинале вместо A_L было применено обозначение P , а вместо u обозначение v .)

Вывод А

Ведущая идея: При переключении числа витков дросселя магнитный поток в сердечнике остается неизменным; изменяется только сцепляющийся с активными витками поток.

$$L = A_L N^2 = N\Phi/i \quad N = (L/A_L)^{1/2} \quad \Phi = A_L Ni \quad \dot{\Phi} = A_L \left(N \frac{di}{dt} + i \frac{dN}{dt} \right)$$

$$u = N \frac{d\Phi}{dt} = N\dot{\Phi} \quad u = A_L N \left(N \frac{di}{dt} + i \frac{dN}{dt} \right) = L \frac{di}{dt} + A_L Ni \frac{dN}{dt}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2(A_L L)^{1/2}} \cdot \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2NA_L} \cdot \frac{dL}{dt} \quad u = L \frac{di}{dt} + \frac{1}{2} i \frac{dL}{dt}$$

Вывод Б

Ведущая идея: катушка получает и отдает энергию только через свои клеммы.

$$W(t_0, t) = E[\Phi(t), t] - E_0[\Phi(t_0), t_0] = [i^2(t)L(t) - i^2(t_0)L(t_0)]/2$$

$$p_L(t) = u(t)i(t) = \frac{dW(t_0, t)}{dt} = i(t)L(t) \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{2} i^2(t) \frac{dL(t)}{dt}$$

$$u(t) = \frac{p_L(t)}{i(t)} = L(t) \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{2} i(t) \frac{dL(t)}{dt}$$

В публикации 1984 года в модель также была включена вариация параметра A_L .

3. Альтернативный вывод для непрерывно изменяемой индуктивности

Напряжение на клеммах переменного дросселя можно рассматривать состоящим из двух независимых компонентов (принцип суперпозиции):

$$u = u_v + u_s \quad \text{или} \quad u = L \left[\frac{di}{dt} \right]_v + L \left[\frac{di}{dt} \right]_s,$$

где:

u_v – напряжение, индуцированное из-за обмена энергии с внешней системой;

u_s – напряжение, индуцированное из-за изменения индуктивности;

$[di/dt]_v$ – изменение тока из-за обмена энергии с внешней системой;

$[di/dt]_s$ – изменение тока из-за изменения числа активных витков / индуктивности.

* В то время заведующий сектором Института термофизики и электрофизики АН Эстонской ССР.

Индуктированное из-за изменения индуктивности компонента напряжения можно вычислить из выражения энергии дросселя при условии, что количество энергии в ходе коммутации не изменяется:

$$W = \frac{Li^2}{2} = \text{const.} \quad \text{или} \quad W = \frac{L(t)i^2(t)}{2} = \text{const.}$$

Дифференцируя по времени:

$$\frac{d}{dt} [Li^2] = \frac{dL}{dt} i^2 + 2Li \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} \frac{dL}{dt} i = -L \frac{di}{dt} \quad \text{или} \quad L \frac{di}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dL}{dt} i.$$

Последняя формула представляет напряжение, индуцированное из-за изменения индуктивности. Это напряжение может быть добавлено к напряжению, индуцированную из-за изменения тока под действием внешней системы:

$$u(t) = L(t) \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{2} i(t) \frac{dL(t)}{dt}.$$

Так как при увеличении индуктивности ток через дроссель уменьшается, перед вторым членом написан знак плюс.

Слабым местом всех этих выводов является то, что вычисляют производное из натурального числа N , т.е. число витков рассматривается как вещественное число, инкременты которого могут быть сколь угодно малые. Хотя это в принципе осуществимо – например, путем смещения или вращения части обмотки, так что сцепляющийся с обмоткой магнитный поток непрерывно увеличивается или уменьшается. Если энергии для смещения/вращения секции дросселя взять от магнитного поля катушки (или возвращать освобожденную энергию магнитному полю), то предпосылки представленных выше выводов формулы (1) выполнены. Но такая модель остается далеко от практики, где секции дросселя переключают с помощью полупроводниковых ключей. Как показали эксперименты, формула (1) приблизительно описывает процесс и в таком случае. Ниже это доказано и теоретически.

4. Вывод для скачкообразно изменяемой индуктивности

Модель

- Секции дросселя переключают(ся) через равные временные интервалы.
- Переход тока из одной ветви в другой происходит мгновенно и без изменения энергии дросселя.
- Дроссель подключен в индуктивную цепь, рис. 2. (Чтобы позволить максимально возможный размах напряжения.)

Рассмотрим предельный процесс, где интервалы между коммутациями и скачки индуктивности неограниченно приближаются к нулевому значению, рис. 3.

При определенных таким образом модели и предельном процессе (и, следовательно, не в общем случае), нельзя предположить приближение хода напряжения $u(t)$ к гладкой функции, потому что при наличии даже небольшой индуктивности последовательно с переменным дросселем, и в случае даже незначительных скачков в токе, индуцируются импульсы напряжения бесконечно большой амплитуды (δ -функция Дирака).

Но можно убедиться, что в таком предельном процессе скользящее среднее напряжение $\bar{i}(t)$ дросселя приближается к гладкой функции.*

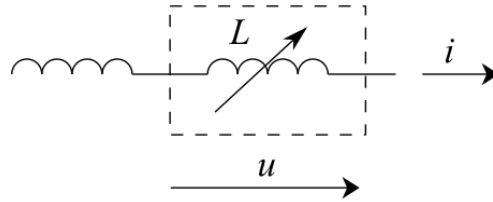


Рис. 2. Модель, где последовательно с переменным дросселем включена дополнительная индуктивность – чтобы позволить максимально возможное варьирование напряжения.

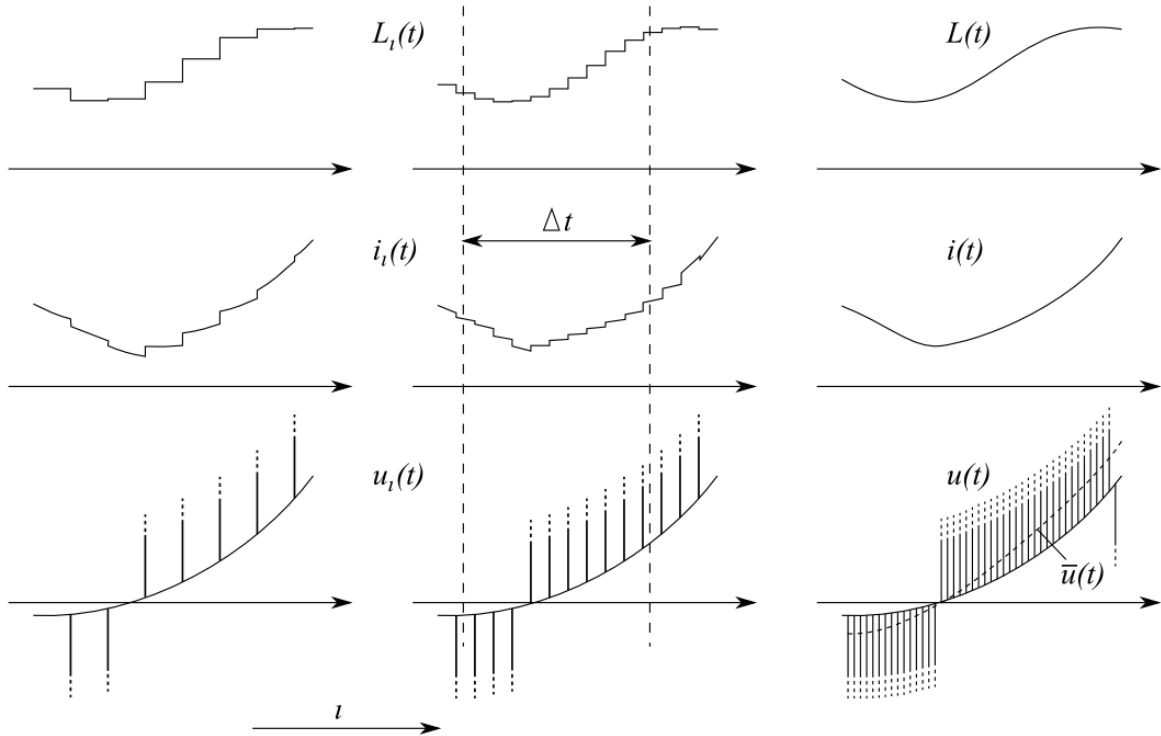


Рис. 3. Предельный процесс, где частота переключения индуктивности дросселя беспредельно увеличивается (схематично). Даже если ходы индуктивности и тока приближаются к гладким функциям, ход напряжения может оставаться неограниченной. l – количество коммутаций на единицу времени.

Скользящее среднее значение напряжения на клеммах переменного дросселя с шириной окна Δt :

$$\bar{u}_i[t, t + \Delta t] = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u_i(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Наша цель – показать, что существуют пределы $\liminf_{l \rightarrow \infty} \bar{u}_i[t, t + \Delta t]$ и $\limsup_{l \rightarrow \infty} \bar{u}_i[t, t + \Delta t]$, и что в рассматриваемом предельном процессе, если дополнительные $\Delta t \rightarrow 0$, оба приближаются к одной и той же асимптоте $\bar{u}(t)$, при чем

$$\bar{u}(t) = L(t) \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{2} i(t) \frac{dL(t)}{dt}. \quad (3)$$

Пусть дроссель без потерь и коммутации тока из одной ветви в другой происходят мгновенно, так что в любых моментах времени t_1 и t_2 только один ключ закрыт.

* Следующая часть, за исключением иллюстраций, взята из предыдущей публикации авторов в 1998 году [5].

Доказательство

В соответствии с балансом энергии дросселя:

$$\int_{t_1}^{t_2} i_l(t) u_l(t) dt = \frac{L_l(t_2) i_l^2(t_2)}{2} - \frac{L_l(t_1) i_l^2(t_1)}{2}. \quad (4)$$

Пусть $i_{\min(t)}$ и $i_{\max(t)}$ минимальные и максимальные значения тока $i_l(t)$ на промежутке времени $[t_1, t_2]$, и i_{\min} и i_{\max} соответствующие значения для $i(t)$.

Пусть $i(t) > 0$ на промежутке времени $[t_1, t_2]$, тогда также $i_l(t) > 0$ при достаточно большой l . Пусть также $u_l(t) > 0$ для достаточно большой l , тогда мы можем написать:

$$i_{\min(t)} \int_{t_1}^{t_2} u_l(t) dt \leq \int_{t_1}^{t_2} i_l(t) u_l(t) dt \leq i_{\max(t)} \int_{t_1}^{t_2} u_l(t) dt. \quad (5)$$

Если $\int_{t_1}^{t_2} u_l(t) dt$ был бы неограниченным при неограниченном увеличении l , то внешние члены (5) также были бы неограниченными, что было бы в противоречие со сходимости среднего звена.

Следовательно, конечные $\frac{1}{\Delta t} \liminf_{l \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} u_l(t) dt$ и $\frac{1}{\Delta t} \limsup_{l \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} u_l(t) dt$ существуют.

Принимая во внимание энергетический баланс (4), мы можем на пределе $\limsup_{l \rightarrow \infty} \bar{u}_l[t, t + \Delta t]$ для левого неравенства выражения (5) написать:

$$i_{\min} \limsup_{l \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} u_l(t) dt \leq \frac{L(t_2) i^2(t_2)}{2} - \frac{L(t_1) i^2(t_1)}{2}, \quad (6)$$

и на пределе $\liminf_{l \rightarrow \infty} \bar{u}_l[t, t + \Delta t]$ для правого неравенства выражения (5):

$$\frac{L(t_2) i^2(t_2)}{2} - \frac{L(t_1) i^2(t_1)}{2} \leq i_{\max} \liminf_{l \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} u_l(t) dt \quad (7)$$

В итоге получаем:

$$i_{\min} \liminf_{l \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} u_l(t) dt \leq i_{\min} \limsup_{l \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} u_l(t) dt \leq \frac{L(t_2) i^2(t_2)}{2} - \frac{L(t_1) i^2(t_1)}{2} \leq i_{\max} \liminf_{l \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} u_l(t) dt \leq i_{\max} \limsup_{l \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} u_l(t) dt, \quad (8)$$

что эквивалентно с неравенствами

$$\frac{1}{i_{\max}} \left[\frac{L(t_2) i^2(t_2)}{2} - \frac{L(t_1) i^2(t_1)}{2} \right] \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} u_l(t) dt \leq \frac{1}{i_{\min}} \left[\frac{L(t_2) i^2(t_2)}{2} - \frac{L(t_1) i^2(t_1)}{2} \right] \quad (9)$$

$$\text{и } \frac{1}{i_{\max}} \left[\frac{L(t_2) i^2(t_2)}{2} - \frac{L(t_1) i^2(t_1)}{2} \right] \leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} u_l(t) dt \leq \frac{1}{i_{\min}} \left[\frac{L(t_2) i^2(t_2)}{2} - \frac{L(t_1) i^2(t_1)}{2} \right]. \quad (10)$$

Делим выражения в квадратных скобках с Δt и вычислим предельные значения при $\Delta t \rightarrow 0$.

Тогда $i_{\min} \rightarrow i(t)$, $i_{\max} \rightarrow i(t)$ и

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{L(t_2)i^2(t_2)}{2} - \frac{L(t_1)i^2(t_1)}{2} \right] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{L(t)i^2(t)}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{dL(t)}{dt} i^2(t) + 2L(t)i(t) \frac{di(t)}{dt} \right] = L(t)i(t) \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{2} i^2(t) \frac{dL(t)}{dt} \end{aligned} \quad (11)$$

Так как $\frac{1}{i_{\min}} \rightarrow \frac{1}{i(t)}$ и $\frac{1}{i_{\max}} \rightarrow \frac{1}{i(t)}$,

все внешние члены неравенств (9) и (10) асимметрично равны, что дает:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \liminf_{t \rightarrow \infty} \bar{u}_i[t, t + \Delta t] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \bar{u}_i[t, t + \Delta t] = \bar{u}(t) = L(t) \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{2} i(t) \frac{dL(t)}{dt}, \quad (12)$$

что и следовало доказать.

С помощью аналогичных рассуждений можно убедиться, что формула (12) действительна и при произвольных знаках $i_i(t)$ и $u_i(t)$ на интервале $[t_1, t_2]$.

Если функции, к которым временные ходы индуктивности и тока приближаются, гладкие аппроксимации реальных прерывистых функции $\bar{L}^*(t)$ и $\bar{i}^*(t)$ (рис. 4) – полученные, например, методом наименьших квадратов – то очевидно, что формула (3) приблизительно действительна также для этих аппроксимации и для аналогичного аппроксимации хода напряжения $\bar{u}^*(t)$:

$$\bar{u}^*(t) \approx \bar{L}^*(t) \frac{d\bar{i}^*(t)}{dt} + \frac{1}{2} \bar{i}^*(t) \frac{d\bar{L}^*(t)}{dt} \quad (13)$$

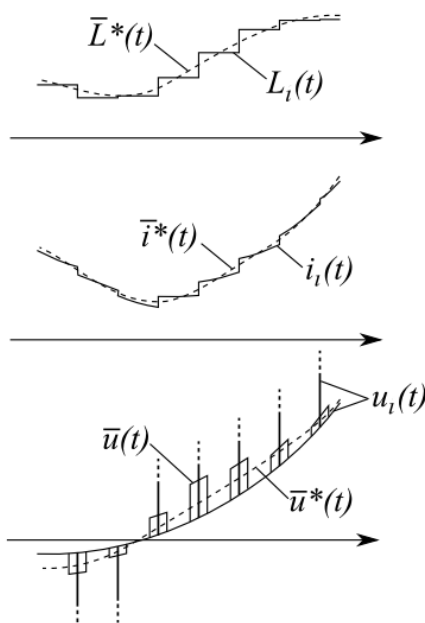


Рис. 4. Приближение временных ходов индуктивности, тока и напряжения гладкими функциями.

Литература

1. В. В. Сарв, Ю. Э. Сооярв, Фильтр для сглаживания пульсаций выпрямленного напряжения. Описание изобретения к авторскому свидетельству № 777782, 07.11.1980, 3 с.
[https://fi.espacenet.com/publicationDetails/biblio?II=0&ND=3&adjacent=true&locale=fi_FI&FT=D&date=19801107&CC=SU&NR=777782A1&KC=A1#]
2. T. Sakkos, V. Sarv, Theory and application of linear time-varying inductors with controlled turn-number. ICEM 2000 Proceedings, 1: International Conference on Electrical Machines (ICEM 2000), Espoo, Finland, 28-30 August 2000. Espoo, Finland: Helsinki University of Technology, p. 120–124.
3. V. Sarv, Energy balance and voltage-current relation for linear inductors with time-varying turns. Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika, matemaatika (ISSN 0367-1429), 1982, kd. 31, nr. 1, lk. 79–82. [Можно бесплатно читать здесь: <https://www.etera.ee>]
4. V. Sarv. Interdependence between the voltage-current relation and energy balance for the linear time-varying inductive and capacitive one-ports. Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika, matemaatika, 1984, kd. 33, nr. 2, lk. 227-237. [Можно бесплатно читать здесь: <https://www.etera.ee>]
5. A. Kruusing, A. Tauts, On the voltage across an inductor with time-varying turn number. Im Buch: 43. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium, TU Ilmenau, Thüringen, 21–24.09.1998, Bd. 4, S. 628-633.