ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Band 212. Nr. 5069. 5.

Das Prinzip der schnellsten Ankunft des Lichtes und die Aberration. Von *P. Harzer*.

1. In meinem Aufsatze »Über die Mitführung des Lichtes in Glas und die Aberration« (Astr. Nachr. Bd. 198, Nr. 4748, 1914) hatte ich aus einem physikalischen Versuche über die Mitführung des Lichtes in Glas, den ein inzwischen zu Beginn des Krieges im Kriegsdienste durch eine Explosion ums Leben gekommener junger Physiker, *Franz Harress*, ausgeführt, aber nicht richtig berechnet hatte, die Bestätigung dafür erhalten, daß der Mitführungskoeffizient k des Glases mit dem Brechungsexponenten ν des ruhenden Mittels durch die *Fresnel*sche Formel $k = 1 - 1/\nu^2$ verbunden sei. Bei dem Versuche war ein kohärentes Lichtbündel in zwei Teilbündel zerspaltet und die beiden Teilbündel waren in entgegengesetzten Richtungen, oft reflektiert, durch einen aus Glasprismen zusammengesetzten, angenähert kreisförmigen Ring, der gewissermaßen in sich selbst rotierte, gesandt und nach dem Wiederaustritte aus dem Ringe zur Interferenz gebracht worden. Zur theoretischen Berechnung der beobachteten Veränderung, die die Phasendifferenz der beiden Lichtbündel durch die Rotation des Ringes erlitt, hatte ich die Veränderung des Ganges des mittleren Strahles der Teilbündel in den Gliedern erster Ordnung in bezug auf das Verhältnis $\varepsilon = c/v$ der Geschwindigkeit des Mittels und des Lichtes berechnet und darauf Rücksicht genommen, daß sich die Strahlen in dem gleichmäßig rotierenden Ringe kreisförmig krümmen. Ich hatte aber dieser Rechnung auch eine Näherungsformel für die Veränderung der Phasendifferenz zur Seite gestellt, bei der ich angenommen hatte, daß ein Strahl in dem Ringe die Form eines geradlinigen Polygones, die er in dem ruhenden Ringe hatte, auch in dem rotierenden Ringe beibehielte, und daß sich infolge der Rotation nur die Geschwindigkeit des Lichtes in ihm durch die Mitführung änderte. Diese Näherungsformel, die sich von der Formel von *Harress* nur durch die Vertauschung von k mit $1-k$ unterscheidet, war ohne weiteres in dem »idealen Falle« als richtig zu erkennen, daß der Strahl durch unendlich viele Reflexionen zu einem geschlossenen Kreise zusammengebogen würde. Die numerische Rechnung, die die Veränderung des Strahlenganges durch die Rotation des Ringes verfolgte und die Rechnung nach der Näherungsformel, die auf die Kenntnis der Veränderung des Strahlenganges ganz verzichtete, hatte mir statt der erwarteten nur genäherten, vielmehr eine vollkommene Übereinstimmung ergeben; und für dieses hohe Maß der Übereinstimmung hatte ich damals keine Erklärung geben können. Eine solche Erklärung gibt nun Herr *v. Laue* (Zum Versuch von *F. Harress*, Ann. d. Phys. Bd. 62, Heft 5, Leipzig 1920). Herr *v. Laue* macht dabei, indem er sich im übrigen auf den Standpunkt der Relativitätstheorie stellt, von dem *Fermat*schen Prinzipe der schnellsten Ankunft des Lichtes Gebrauch. Wenn nämlich die Zeit der Ankunft des Lichtes für den wirklichen Strahlengang ein Minimum ist, bewirkt eine beliebige kleine, der Ordnung ε angehörende Veränderung in diesem Strahlengange, dem Wesen des Minimums entsprechend, in der Zeit der Ankunft und also auch in der Phasendifferenz, nur eine unmerkbare Veränderung von der Ordnung ε^2. Als eine solche beliebige Änderung liegt meiner Näherungsformel das Zurückgehen auf den Strahlengang in dem ruhenden Ringe zugrunde, für dessen Durcheilung aber die relative Geschwindigkeit in dem rotierenden Ringe anzunehmen ist. Übrigens unterscheidet sich diese Geschwindigkeit für die beiden Strahlengänge nur um hier nicht in Betracht kommende Größen von der Ordnung ε^2.

Bei diesem Zusammenhange drängt die vollständige Übereinstimmung der Ergebnisse meiner beiden numerischen Rechnungen für die Veränderung der Phasendifferenz der beiden Teilbündel die Vermutung auf, daß die Formeln, die ich für die Brechung und die Reflexion eines Strahles an und in dem rotierenden Ringe aufgestellt und benutzt hatte, dem Prinzipe der schnellsten Ankunft des Lichtes entsprechen und aus ihm abgeleitet werden können. Diese Formeln hatte ich unter Berufung auf die *Fresnel*sche Hypothese eingeführt; *Fresnel* hat aber (Lettre de M. *Fresnel* à M. *Arago* sur l'influence du mouvement terrestre dans quelques phénomènes d'optique, Ann. de chim. et de phys. T. IX, Paris 1818) nur zwei besondere Fälle untersucht, nämlich erstens die Brechung eines Strahles, der senkrecht auf die erste Seite eines dreiseitigen Prismas fällt, das sich in der Richtung des einfallenden Strahles bewegt, und zweitens die Brechung eines Strahles, der senkrecht auf eine planparallele Platte fällt, die sich senkrecht zu dem einfallenden Strahle bewegt. Die allgemeinen Gleichungen scheinen aber vor meinem früheren Aufsatze in der Literatur nicht vorzukommen; es wäre deshalb besser gewesen, die Formeln dort einfach als den Ausdruck der astronomischen Erfahrung einzuführen; denn sie besagen in Übereinstimmung mit dieser Erfahrung, daß auch an bewegten Mitteln für die der Beobachtung unterliegenden relativen Strahlen die gewöhnlichen für ruhende Mittel geltenden Gesetze der Brechung und der Reflexion, und zwar mit den der Ruhe entsprechenden konstanten Werten der Brechungsexponenten in Kraft bleiben. Wegen der Bedeutung dieser Formeln für die Astronomie ist aber ihrer bloßen Zurückführung auf die Erfahrung ihre Ableitung aus einem einfachen, plausibelen Prinzipe vorzuziehen. Mir selbst muß eine solche bessere Begründung der Formeln um so mehr erwünscht sein, als mir auch in dem früheren Aufsatze die Untersuchung über die Mitführung des Lichtes nur ein Mittel zu diesem Zwecke gewesen ist. Ich gebe nun im folgenden den elementaren Nachweis, daß die Formeln in der Tat als ausreichende Näherungen aus dem Prinzipe der schnellsten Ankunft des Lichtes hervorgehen. Für mich liegt dabei ebensowenig, wie bei meinem früheren Aufsatze eine Veranlassung vor, zur Relativitätstheorie Stellung zu nehmen. Herr *v. Laue* aber beansprucht für die Anerkennung der Formeln, daß sie sich aus der Relativitätstheorie rechtfertigen lassen, was zu entscheiden er nicht vermocht habe.

2. Wir wählen nun drei beliebige feste, zueinander senkrechte Achsen X', X'', X'''; die auf sie bezogenen Richtungscosinus bezeichnen wir mit einem Buchstaben, dem wir obere Striche in der Anzahl der betreffenden Achse hinzufügen. In der allgemeinen Bezeichnung lassen wir die Striche fort; sie können aber in einer Gleichung, in der Richtungscosinus vorkommen, in beliebiger, für alle Richtungscosinus aber in derselben Zahl hinzugefügt werden.

Zunächst betrachten wir nur ein in Bewegung begriffenes Mittel und nehmen in ihm auf einem nach einer Grenzfläche des Mittels gehenden Strahle einen in dem Mittel festen Punkt P an; und zwar wählen wir den Punkt, um von der Veränderlichkeit der Bewegung des Mittels, von der entsprechenden Krümmung des Strahles und von der Krümmung der Grenzfläche unabhängig zu werden, der Grenzfläche unendlich nahe, sodaß diese in der Nachbarschaft des Punktes durch ihre Tangentialebene ersetzt werden kann. Die Geschwindigkeit und die Richtungscosinus der Bewegung bezeichnen wir im Anschlusse an meinen früheren Aufsatz für das Licht in dem ungestörten Strahle, wie er in dem Mittel verlaufen würde, wenn es ruhte, mit v, χ; für das Licht in dem relativen Strahle, so wie er, mitgeführt, in dem in Bewegung begriffenen Mittel verläuft, mit w, ψ; für das Mittel mit $c, \varkappa$. Die bereits in meinem früheren Aufsatze benutzte Beziehung zwischen den beiden Strahlen wird dann mit den Abkürzungen $f = (1-k)\,e$, $e = c/v$, durch die Gleichung

$$v\chi = w\psi + fv\varkappa \qquad (1)$$

ausgedrückt. Über die Abhängigkeit des Mitführungskoeffizienten k von v möge nichts vorausgesetzt werden.

Wir betrachten nun zwei Strahlen, die von dem Punkte P nach zwei Punkten T und T^* der Grenzfläche gehen, und wir ermitteln den Unterschied τ der Zeiten, die das Licht in den beiden Strahlen braucht, die Grenzfläche zu erreichen. Für den Strahl PT verwenden wir die eingeführten Größen ohne eine obere Kennzeichnung, für den Strahl PT^* aber fügen wir den Größen oben einen Stern hinzu. Die Länge PT des Strahles bezeichnen wir mit s, die Entfernung TT^* und ihre Richtungscosinus mit x, ω. Die den beiden Strahlen gemeinsamen Größen $v, c, \varkappa$; $\varkappa, \omega$ verwenden wir dabei auch für den Strahl PT^* ohne oberen Stern. Dann besteht zwischen den beiden Strahlen die Beziehung

$$s^*\psi^* = s\psi + x\omega\,. \qquad (2)$$

Wir benutzen nun das Summenzeichen Σ für eine nach den drei Achsen zu nehmende Summe und setzen zur Abkürzung

$$\cos\lambda = \Sigma\psi\omega \qquad \cos\mu = \Sigma\omega\varkappa \qquad \cos\nu = \Sigma\varkappa\psi.$$

Die Größen λ, μ, ν sind dann bei der Übertragung der Richtungen auf die Kugel vom Halbmesser 1 die Seiten eines sphärischen Dreieckes, dessen Ecken den Richtungen $\varkappa$ der Bewegung des Mittels ψ des relativen Strahles und ω der Strecke TT^* entsprechen. Dann findet man

$$\begin{aligned} v^2 &= \Sigma(v\chi)^2 = w^2 + 2fvw\cos\nu + f^2v^2 \\ s^{*2} &= \Sigma(s^*\psi^*)^2 = s^2 + 2xs\cos\lambda + x^2 \\ s^*\cos\nu^* &= \Sigma s^*\psi^*\varkappa = s\cos\nu + x\cos\mu\,. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt der mit positiver Wurzel zu nehmende Wert

$$v/w = [\sqrt{1-f^2\sin^2\nu} + f\cos\nu]/(1-f^2)$$

der auch gültig bleibt, wenn man w, ν mit w^*, ν^* vertauscht, v, f aber ungeändert läßt. Mit diesen Beziehungen erlangt man nun für den Unterschied der Zeiten

$$\tau = s^*/w^* - s/w$$

durch die Elimination der mit einem Stern versehenen Größen den mit positiven Wurzeln zu nehmenden Wert

$$\tau = \{\sqrt{s^2(1-f^2\sin^2\nu) + 2xs[\cos\lambda - f^2(\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu)] + x^2(1-f^2\sin^2\mu)} - \sqrt{s^2(1-f^2\sin^2\nu)} + fx\cos\mu\}/[(1-f^2)v].$$

Das Minimum der für die beiden Mittel zu bildenden Summe der beiden Werte von τ erhält man nun durch die Vergleichung benachbarter Strahlen, die sich durch kleine Werte von x unterscheiden; deshalb fügen wir der strengen Formel für τ die auf die zweite Potenz von x beschränkte Potenzreihe nach x hinzu. Mit den Abkürzungen

$$F = \sqrt{1-f^2\sin^2\nu} \qquad a' = (\cos\lambda/v + f\cos\mu/w)/F$$
$$a'' = [\sin^2\lambda + (f^2/F^2)(\cos\mu - \cos\lambda\cos\nu)^2]/(2Fvs)$$

erlangt diese die Form

$$\tau = a'x + a''x^2.$$

3. Wir betrachten nun zwei in einer gemeinsamen Grenzfläche aneinander stoßende Mittel, denen eine gemeinsame Bewegung zukommt; und wir untersuchen die Veränderung, die die Richtung eines Strahles in dieser Grenzfläche nach dem Prinzipe der schnellsten Ankunft des Lichtes erleidet; dabei beschränken wir uns auf die Brechung des Strahles bei dem Übergange aus dem ersten Mittel in das zweite, weil die dafür erlangten Formeln diejenigen für die Reflexion und die Rückkehr des Strahles in das erste Mittel als besonderen Fall, nämlich für die Beschränkung auf gleiche Werte der ungestörten Geschwindigkeit in den beiden Mitteln ergeben. Zu den beiden Seiten der gemeinsamen Grenzfläche der beiden Mittel wählen wir, ihr unendlich nahe, zwei in den Mitteln feste Punkte P_0 und P_1, als Anfangs- und Endpunkt eines in der Grenzfläche gebrochenen Strahles, und wir leiten den Unterschied der Zeiten für die beiden Strahlengänge P_0TP_1 und $P_0T^*P_1$ ab. Den für die beiden Mittel geltenden Größen geben wir, wie den Punkten P_0 und P_1, die unteren Indizes 0 und 1; die für die beiden Mittel gemeinsamen Größen $c, \varkappa, \omega, \mu$ bleiben dabei ohne Index; und auch die Größe x erhält keinen Index, sie muß aber ihr Vorzeichen, das wir für das erste Mittel so belassen, wie es angesetzt worden ist, für das zweite Mittel umkehren, weil in bezug auf eine beliebige Richtung die nach der Formel (2) zu bildenden Projektionen für alle aus je einem einfallenden und einem gebrochenen Teile bestehenden Strahlengänge zwischen P_0 und P_1, also im besonderen auch für die Strahlengänge P_0TP_1 und $P_0T^*P_1$ einander gleich und deshalb von x unabhängig sind. Es wird demnach

$$\tau_0 + \tau_1 = (a_0' - a_1')x + (a_0'' + a_1'')x^2.$$

Wir nehmen nun an, daß der Strahlengang P_0TP_1 der schnellste sei, daß also $\tau_0 + \tau_1$ für sehr kleine Werte von x und für alle möglichen Richtungen ω positiv werde. Möglich aber sind alle Richtungen ω, die in die Grenzfläche fallen; bezeichnet also f die Richtungscosinus der als Einfallslot bezeichneten in einer der beiden entgegengesetzten Richtungen positiv zu nehmenden Normalen der Grenzfläche, so müssen die drei Größen ω den beiden Gleichungen

$\Sigma\omega\omega = 1$ und $\Sigma f\omega = 0$ genügen. Einer möglichen Richtung ω tritt hiernach immer auch die entgegengesetzte Richtung $-\omega$ als möglich zur Seite. Da die Richtungen ω aber in der Grenzfläche selbst beliebig sind, so kann den drei Größen ω keine weitere Bedingung auferlegt werden.

Nun ist sofort ersichtlich, daß das aus lauter Quadraten mit positiven Koeffizienten zusammengesetzte zweite Glied des Ausdruckes für $\tau_0+\tau_1$ stets positiv ist; das erste Glied aber ist eine lineare homogene Funktion der drei Größen ω und hat also für entgegengesetzte Richtungen, die zugleich möglich sind, entgegengesetzte Werte; ein negativer Wert des in die erste Potenz von x multiplizierten Gliedes würde aber, wie klein auch der Koeffizient $a_0'-a_1'$ sein möge, für genügend kleine Werte von x das positive zweite, in die zweite Potenz von x multiplizierte Glied übertreffen und einen negativen Wert von $\tau_0+\tau_1$ herbeiführen. Da das der Annahme widerspricht, so kann das erste Glied nicht negativ sein; da aber entgegengesetzte Werte dieses Gliedes zugleich möglich sind, so kann es auch nicht positiv sein; und deshalb muß der Koeffizient des ersten Gliedes verschwinden. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die schnellste Ankunft des Lichtes auf dem Strahlengange P_0TP_1 wird also durch die Formel $a_0'-a_1'=0$ dargestellt. Diese Gleichung muß nun, da $a_0'-a_1'$ eine lineare homogene Funktion der drei Größen ω ist, für die eine weitere Bedingung nicht vorgeschrieben werden kann, das Produkt der Formel $\Sigma f\omega = 0$ mit einem Faktor $\mathfrak{J}$ sein, der von der Richtung der Achsen X nicht abhängt. Im Hinblicke auf die Formeln für die Größen $\cos\lambda$, $\cos\mu$ und mit der Abkürzung

$$G = f_0/F_0w_0 - f_1/F_1w_1$$

erhält man also die Formel

$$\psi_0/F_0v_0 - \psi_1/F_1v_1 + Gx = \mathfrak{J}f. \qquad (3)$$

Die hier vorkommenden Größen F_0, F_1, G hängen, insofern sie veränderlich sind, nur von den Winkeln ν_0, ν_1 ab, die die beiden relativen Strahlen mit der Richtung der Bewegung der Mittel bilden. Mit der Hilfe der Gleichung (1) folgt aus der Formel (3), indem das in x multiplizierte Glied wegfällt, die Beziehung

$$\chi_0/F_0w_0 - \chi_1/F_1w_1 = \mathfrak{J}f. \qquad (4)$$

Damit diese Gleichung nur Größen enthalte, die sich auf die ungestörten Strahlen beziehen, müssen noch die Winkel ν_0, ν_1 der relativen Strahlen gegen die Richtung der Bewegung der Mittel durch die Winkel π_0, π_1 der ungestörten Strahlen gegen diese Richtung ersetzt werden. Mit der Formel

$$\cos\pi = \Sigma x\chi$$

und mit der Hilfe der Gleichung (1) erhält man nun die Formeln

$$w\cos\nu = v(\cos\pi - f)$$

$$F = (1-f\cos\pi)/\sqrt{1-2f\cos\pi+f^2} \qquad Fw = v(1-f\cos\pi).$$

Den Wert von $\mathfrak{J}$ erlangt man sowohl aus den Gleichungen (3), wie aus den Gleichungen (4) nach der Formel

$$\mathfrak{J} = \Sigma(\mathfrak{J}f)^2.$$

Die bloße Form der Gleichungen (4) als lineare homogene Gleichung zwischen χ_0, χ_1, f zeigt, daß die Determinante dieser drei mal drei Richtungscosinus verschwindet, daß also der ungestörte Strahl in seinem einfallenden und seinem gebrochenen Teile in einer durch das Einfallslot gelegten Ebene, der Einfallsebene, liegt. Bei den relativen Strahlen bewirkt aber das die Homogenität zerstörende Glied Gx der Formel (3) zwischen ψ_0, ψ_1, f, daß die Brechungsebene von der Einfallsebene verschieden ist. Auch die Einfallsebene des ungestörten Strahles fällt nicht mit der Einfallsebene des relativen Strahles zusammen. Zur Ermittelung der Winkel zwischen diesen verschiedenen Ebenen lassen wir die X'-Achse mit dem Einfallslote, und die $X'X''$-Ebene mit der Einfallsebene des relativen Strahles zusammenfallen; dann wird $f'=1$, $f''=0$, $f'''=0$, $\psi_0'''=0$. Ergibt nun die X'-Achse die Richtung nach dem Zenit und die $X'X''$-Ebene den Meridian, so stellen die Ausdrücke χ_0'''/χ_0'' und ψ_1'''/ψ_1'' die Tangenten der Azimute der Einfallsebene des ungestörten Strahles und der Brechungsebene des relativen Strahles dar, und die Gleichungen (1) und (3) liefern die Werte

$$\chi_0''' = f_0 x''' \qquad \psi_1''' = F_1 G v_1 x'''.$$

4. Bei der Verwendung der erlangten strengen Formeln für astronomische Zwecke wird es vermutlich immer ausreichen, die Glieder allein von der 1. Ordnung in den beiden Größen e zu berücksichtigen; dann vereinfachen sich die Formeln zunächst dadurch, daß F mit der Einheit vertauscht wird. Die Formel (3) kann aber noch weiter vereinfacht werden; die astronomische Erfahrung lehrt nämlich, daß für die der Beobachtung unterliegenden relativen Strahlen die Gleichungen (3) ohne einen merkbaren Wert des Gliedes Gx gelten, daß also für beide Strahlen ausreichend genau die folgenden gleichgebauten, bereits in meinem früheren Aufsatze benutzten Formeln bestehen:

$$\psi_0/v_0 - \psi_1/v_1 = \mathfrak{J}f \qquad (3')$$

$$\chi_0/w_0 - \chi_1/w_1 = \mathfrak{J}f. \qquad (4')$$

Es möge hierbei zunächst beachtet werden, daß zu den Richtungscosinus des einen der beiden Strahlen, des ungestörten und des relativen Strahles, übers Kreuz die Geschwindigkeiten des anderen Strahles als Divisoren hinzutreten. Aus den Gleichungen (3) folgt aber sodann weiter, daß die Größe G und folglich auch die Größe $f_0/v_0 - f_1/v_1$ von der Ordnung e^2 ist. Da nun $v_0\mathfrak{v}_0 = v_1\mathfrak{v}_1$ ist und der Mitführungskoeffizient k für den freien Äther ($\mathfrak{v}=1$) verschwindet, so kann die *Fresnel*sche Formel $k = 1-1/\mathfrak{v}^2$ nur um Glieder von der Ordnung e ungenau sein. Indem damit G der Ordnung e^2 zugewiesen wird, fällt mit der Vernachlässigung der Glieder von dieser Ordnung, wie ohnehin in Strenge für den ungestörten Strahl, so nun auch für den relativen Strahl die Brechungsebene mit der Einfallsebene zusammen und nur zwischen den Einfallsebenen des ungestörten und des relativen Strahles bleibt ein Winkel von der Ordnung e bestehen.

Es möge noch bemerkt werden, daß die dem Prinzipe der schnellsten Ankunft des Lichtes entsprechenden strengen Formeln in den von den gewöhnlichen Formeln abweichenden Gliedern von der Ordnung e^2 nicht etwa zu einem Versuche, die Unstimmigkeit bei dem *Michelson*schen Versuche zu erklären, benutzt werden können. Denn diese Unstimmigkeit betrifft Glieder von der Ordnung e^2, und die Glieder von dieser Ordnung in unseren Formeln können, insofern auch der Strahlengang des *Michelson*schen Versuches dem genannten Prinzipe entspricht, in der Zeit und in der Phasendifferenz nur Änderungen von der Ordnung e^4 hervorrufen.

Klotzsche-Dresden, 1920 März 20. *Paul Harzer.*