

# NUOVO CONTRIBUTO ALLA TEORIA BALISTICA DELLE « STELLE VARIABILI ». SPIEGAZIONE DEL FENOMENO PER LE STELLE DEL TIPO *U GEMINORUM* E DEL « CLUSTERTYP ».

NOTA del Prof. M. LA ROSA

---

Le obiezioni rivolte dai sigg. Bernheimer (1) e Salet (2) al mio schizzo teorico del fenomeno di « variabilità » dedotto dall'applicazione del principio balistico alla propagazione della luce, mi hanno condotto a fare un esame approfondito delle particolarità che detto schizzo ci porta a prevedere, nel caso in cui la costante  $Kb$ , dell'equazione fondamentale prende valori molto più grandi di 1.

I risultati di un tale esame sono stati assai sođdisfacenti, perchè mi hanno condotto a spiegare in modo semplice ed immediato il comportamento dei due gruppi di « variabili » che fino a oggi sono rimasti circondati da fitto mistero (3).

Insistere sull'importanza di un tale accordo è cosa superflua. È un nuovo gruppo di fatti che viene in modo diretto e naturale a parlare in favore della applicazione del principio balistico alla luce; applicazione che si presenta come agevole e naturale sul terreno delle teorie quantistiche (4).

Riservandomi di discutere in altra Nota la divergenza fra il tipo di variabilità che la teoria balistica viene così a prevedere e quello che risulterebbe dalle osservazioni (secondo Bernheimer), esporrò in questo scritto l'analisi che

---

(1) *Zeitsch. L. Phys.* Bd. XXXVI. § 302-1926.

(2) C. R. T. 183; p. 1263 - 1926.

(3) Si tratta appunto di quelle variabili a tipo discontinuo a cui non è possibile applicare l'ipotesi dell'eclissi per la lunga durata dei minimi e quella brevissima dei massimi.

(4) Intorno al mio tentativo di applicare alla luce il principio balistico, si è formata erroneamente l'opinione che esso tenda a rimettere in onore la teoria di Ritz. Nei miei scritti — è bene metterlo in rilievo — non ho mai parlato di un ritorno a quella teoria, ma della sola applicazione della legge ordinaria di composizione delle velocità alla propagazione della luce; e mi sembra che questa applicazione trovi il suo terreno più naturale nella concezione quantistica della luce, in pieno accordo con le moderne vedute.

mi ha condotto ai risultati annunziati. Prenderò le mosse dalla ricerca degli zeri dell'equazione:

$$x + a \cos x - k = 0$$

a cui si riduce la ricerca delle posizioni di una stella girevole dalle quali la luce emessa giunge contemporaneamente all'osservatore, ricerca che ha interesse in sè stessa, per le applicazioni di cui è suscettibile. Esporrò, dopo, il metodo che si può seguire nel calcolo delle curve di luce nel caso più generale possibile (di  $a$  qualunque; cioè della sovrapposizione di luce proveniente da un numero qualunque di posizioni), e ne farò applicazione ad un caso concreto ( $a = 10$ ) il quale mi darà l'opportunità di dimostrare l'analogia di comportamento di queste curve di luce, previste per  $a$  grande, con le curve di luce che l'osservazione ha da tempo rivelate per le variabili del tipo *U Geminorum*, e per quelle caratteristiche degli « ammassi stellari » (Clustertyp).

#### Ricerca degli zeri.

1) Ricordiamo che l'equazione fondamentale del mio schizzo di una teoria balistica delle stelle variabili è

$$T = t + K \tau_0 + K b \tau_0 \cos \omega t \quad (1)$$

la quale con opportuno cambiamento di variabili prende la forma:

$$(1) \quad y = x + a \cos x$$

o anche

$$(1') \quad \theta = u - e \sin u$$

Sotto questa seconda forma essa è ben conosciuta dagli Astronomi, ma è stata studiata nel caso particolare in cui  $e < 1$ ; poichè, allora, rappresenta il legame semplicissimo che, nel moto dei pianeti, intercede fra il tempo  $\theta$ , l'anomalia eccentrica  $u$  e l'eccentricità  $e$  dell'orbita.

2) Ricordiamo ancora che la (1) si traduce graficamente — in assi cartesiani ortogonali — in una « sinusoide obliqua » (vedi fig. I) inscritta dentro la striscia che ha come sponde le rette:

$$(2) \quad \begin{aligned} y &= x + a \\ y &= x - a \end{aligned}$$

(<sup>2</sup>) I simboli hanno i seguenti significati:

$t$  tempo di partenza della luce dalla stella girevole

$T$  tempo di arrivo all'osservatore

$\tau_0$  periodo di rotazione della stella girevole (su orbita circolare)

$\omega = 2\pi/\tau_0$  velocità angolare della stella girevole.

$b$  rapporto fra la velocità tangenziale  $v$  della stella e la velocità normale  $c$

della luce;  $K = \frac{\Delta}{c \tau_0}$  essendo  $\Delta$  la distanza stella-osservatore.

Il caso dell'orbita ellittica è stato trattato da Cannata R. Acc. Lincei, 1927, 2° sem.

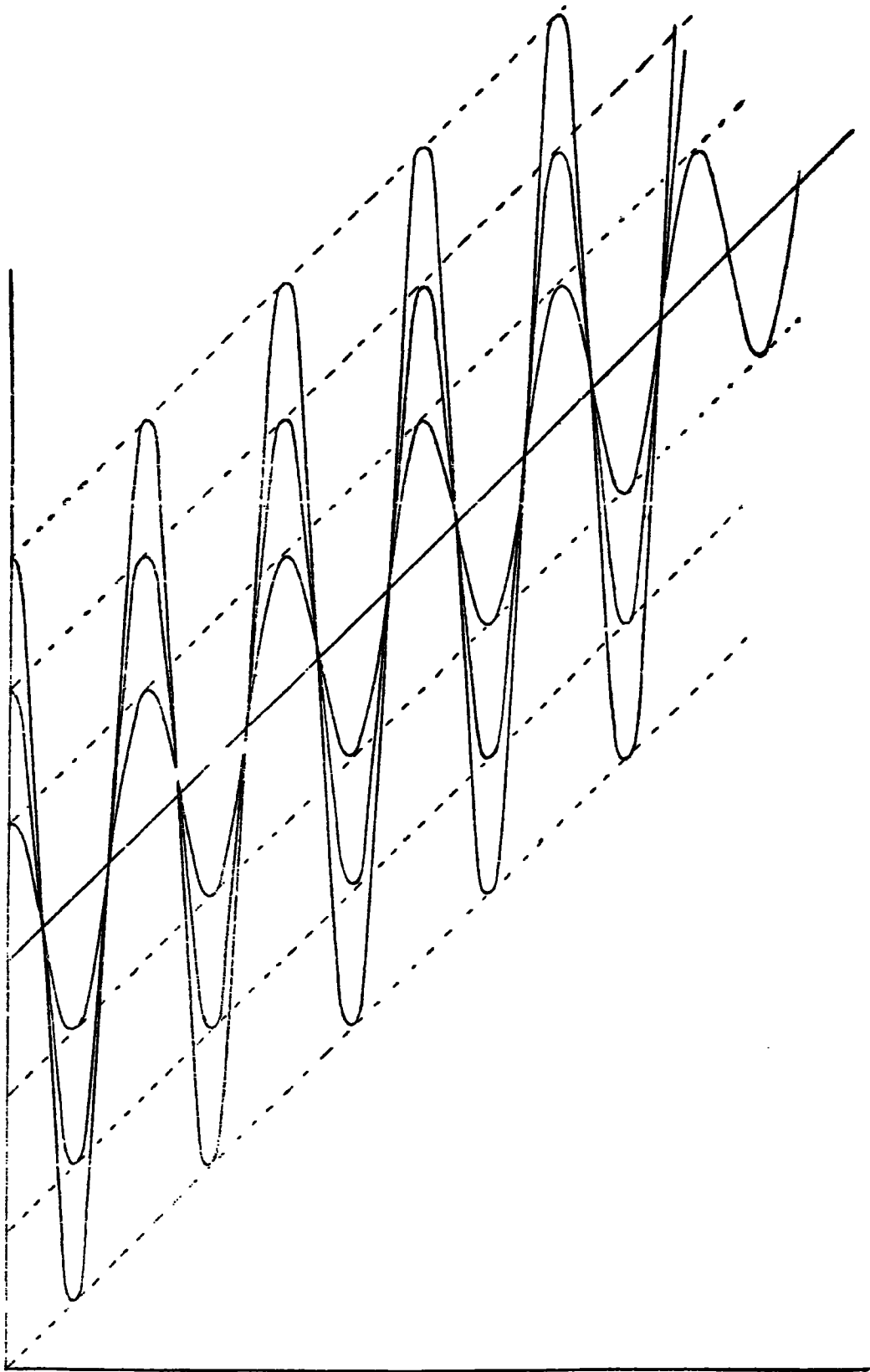


Fig. I.

le quali sono tangenti alla curva in infiniti punti; precisamente la superiore nei punti di ascisse:

$$x = 2n \pi$$

l'inferiore nei punti:

$$x = (2n + 1) \pi$$

con  $n$  intero qualsiasi.

Osserverò poi che ponendo in (1)  $x \pm 2n \pi$ , con  $n$  intero, al posto di  $x$  si ha:

$$(3) \quad y(x + 2n \pi) = \pm 2n \pi + y(x)$$

la quale ci dice, che ad intervalli costanti di ampiezza  $2\pi$  la curva si riproduce identicamente, con questo solo mutamento: il nuovo arco risulta spostato rispetto al precedente di una traslazione parallela all'asse  $y$  e d'importo costante  $2\pi$ .

Tale circostanza ci consente di giovarci della terminologia in uso per le funzioni periodiche, chiamando *periodo* la porzione di curva compresa dentro un intervallo della  $x$  di ampiezza  $2\pi$ ; chiamando « ampiezza » il fattore  $a$  del termine periodico; *asse* della curva, la retta  $y = x$ , che è l'asse della striscia; *fase* nel punto  $P$  la differenza:

$$x - 2n \pi \quad (1)$$

dove  $x$  è l'ascissa di  $P$  ed  $n$  il numero d'ordine del periodo a cui il punto  $P$  appartiene, supposto che si dia l'indice zero a quello dei periodi che cominciano da  $x = 0$ . In una parola, possiamo per molti aspetti trattare la (1) come se fosse periodica (2). Finchè si suppone  $a < 1$  la (1) è sempre crescente poichè non è possibile soddisfare la condizione:

$$y' = 1 - a \operatorname{sen} x = 0$$

mentre la  $y''$  si mantiene sempre  $> 0$ ; invece allorchè è  $a > 1$  presenta infiniti massimi ed infiniti minimi. Di essi, i primi hanno le coordinate:

$$x_{M, n} = x + 2n \pi; \quad y_{M, n} = 2n \pi + (\alpha + a \cos \alpha)$$

gli altri:

$$x_{m, n} = (2n + 1) \pi - \alpha; \quad y_{m, n} = (2n + 1) \pi - (\alpha + a \cos \alpha)$$

dove  $n$  indica un intero qualsiasi (lo zero compreso) ed  $\alpha$  è il più piccolo valore di  $x > 0$  che soddisfa la (3); cioè:

$$(4') \quad \alpha = \operatorname{arcsen} \frac{1}{a}$$

essendo  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

(1) Affinchè la terminologia introdotta sia analoga a quella in uso per le funzioni sinusoidali si dovrebbe chiamare fase il rapporto  $(x - 2n\pi)/2\pi$  e chiamare *valore angolare della fase* la nostra differenza.

(2) Per questo motivo diremo che la (1) è una funzione « periodica impropria ».

Ciò posto, proponiamoci di cercare quale sia il numero dei punti in cui una retta di equazione  $y = k$  taglia la curva; anzi più precisamente di cercare per un dato valore di  $a$  come varii questo numero al variare di  $k$  <sup>(1)</sup>.

\* \* \*

In grazia della « periodicità impropria » di  $y$  sopra rilevata, è chiaro che basta limitare la ricerca ad un solo periodo, cioè supporre  $k$  variabile in un intervallo di ampiezza  $(2\pi)$  potendo estendere agli altri periodi i risultati trovati per uno. Precisamente supporremo  $k$  variabile fra  $a$  e  $a + 2\pi$ . Rileviamo anzitutto che le sponde della striscia staccano sulla retta  $y = k$  un segmento di lunghezza costante i cui estremi hanno le ascisse  $k - a$ ,  $k + a$ ; e che i punti cercati — che sono gli zeri dell'equazione  $x + a \cos x - k = 0$  — debbono stare tutti su di esso.

Cominciamo a supporre che sia  $k = a$ , cioè che la retta tagli la curva nel primo contatto — indice  $0$  — con la sponda superiore. Se  $n$  è il numero di minimi che restano a sinistra dell'estremo  $2a$  del nostro segmento, possiamo affermare che i punti d'incontro cercati sono  $2n + 1$ , perchè ogni minimo dà luogo a due di tali punti, e ciò senza contare il primo contatto sopra ricordato che sta a sinistra del primo massimo e che perciò appartiene alla destra del minimo che precede immediatamente l'asse  $y$ .

La condizione supposta, che il minimo d'indice  $(n-1)$  sia l'ultimo che cada a sinistra di  $2a$ , dà luogo all'altra che l'ordinata di tale minimo è l'ultima che sia  $< a$ , la quale si traduce nella disuguaglianza:

$$(5) \quad y_{m, n-1} = (2n - 1) \pi - (a + a \cos \alpha) \leq a$$

ossia:

$$(2n - 1) \pi \leq a + y_{M, 1}$$

Per persuaderci bene di quello che avviene del nostro numero di zeri, quando facciamo continuamente crescere  $k$  a partire da  $a$ , conviene tenere sott'occhio le distanze che il 1° massimo ed il minimo di indice  $n$  hanno dalla retta  $y = a$ .

Queste distanze sono rispettivamente:

$$(6) \quad \begin{aligned} \delta &= y_{M, 1} - a = a + a (\cos \alpha - 1) \\ \eta &= y_{m, n} - a = (2n + 1) \pi - (y_{M, 1} + a) \end{aligned}$$

È senz'altro evidente, che nel caso in cui fosse  $\delta = \eta$  non possiamo aspettarci alcun cambiamento nel numero  $2n + 1$  di zeri al crescere di  $k$  da  $a$  ad  $a + \delta = y_{M, 1}$  (inclusi gli estremi), ciò perchè mentre la retta, nella sua graduale

---

<sup>(1)</sup> Questa ricerca, accennata nel mio primo lavoro, è stata sviluppata dalla Sig.<sup>a</sup> E. Allara (Giorn. di Sc. Nat. di Palermo, Vol. XVII). Qui viene ripresa in una forma più semplice e più adatta all'applicazione che se ne dovrà fare.

salita taglia sempre la cresta del primo massimo, non riesce ancora a toccare il minimo di indice  $n$ ). Dobbiamo invece aspettarci una diminuzione di 2 unità in esso numero, quando  $k$  superando  $y_{M, 1}$  percorre l'intervallo compreso fra questo valore e la  $y_{m, n}$ .

Vi è anzi, allora, un intervallo di ampiezza:

$$\eta - \delta = y_{m, n} - y_{M, 1} = (2n + 1)\pi - 2y_{M, 1} > 0$$

all'interno del quale il numero degli zeri si riduce a  $2n - 1$ , per ritornare a  $2n + 1$ , non appena  $k$  diventa uguale a  $y_{m, n}$ . Questo valore si conserva invariato per tutto il resto del periodo cioè nell'intervallo  $(y_{m, n}, n\pi + 2\pi)$ , non potendosi più avere dentro il segmento  $k - a, k + a$  nè perdita di massimi, nè guadagno di minimi.

In conclusione se  $(2n - 1)$  è il massimo intero dispari che soddisfa la condizione:

$$(2n - 1)\pi \leq a + y_{M, 1}$$

ed inoltre abbiamo:

$$(2n - 1)\pi > 2y_{M, 1}$$

ossia, in complesso, se abbiamo

$$(7) \quad (2n - 1)\pi \leq a + y_{M, 1} < 2y_{M, 1} < (2n + 1)\pi$$

il numero di radici cercato varia fra  $(2n + 1)$  e  $(2n - 1)$ . È  $(2n + 1)$  nell'intervallo  $(a, a + \delta)$ , è  $(2n - 1)$  nell'intervallo  $(a + \delta, a + \eta)$  e torna  $(2n + 1)$  in  $(a + \eta, a + 2\pi)$ . In fondo per ogni periodo abbiamo due intervalli in uno dei quali il numero di radici è  $(2n + 1)$  e che si estende di  $2\pi - \eta$  a sinistra del contatto con la sponda superiore e di  $\delta$  a destra di esso.

In particolare nel caso in cui  $(2n - 1)\pi = a + y_{M, 1}$ , cioè  $y_{m, n} = a$  gli zeri sono  $2n + 1$  nell'intervallo  $\delta$ , e diventano  $2n - 1$  in tutte le parti rimanenti; perchè il nuovo minimo verrà toccato soltanto alla fine del periodo.

Restano da esaminare i casi in cui  $\delta > \eta$ .

Nel primo di essi avviene che la retta  $y = k$  diventa contemporaneamente tangente alla curva nel 1° massimo ( $k = y_{M, 1} = a + \delta$ ) e nel minimo di indice  $n$ ; il numero dei punti d'intersezione sale allora da  $(2n + 1)$  a  $(2n + 3)$  — contando come doppi i punti di tangenza. — e torna subito a  $(2n + 1)$  non appena  $k$  supera  $y_{M, 1}$ . Si hanno dunque in generale  $(2n + 1)$  zeri, i quali diventano  $(2n + 3)$  solo per  $k = y_{M, 1}$ .

Nell'altro  $\delta > \eta$  esiste tutto un'intervallo di ampiezza  $(\delta - \eta) = (y_{M, 1} - y_{m, n})$  in cui il numero degli zeri sale da  $(2n + 1)$  a  $2n + 3$ ; per ritornare a  $(2n + 1)$  appena  $k$  supera  $y_{M, 1}$ .

Questo valore, evidentemente, si conserva fino alla fine dell'intervallo. In conclusione in questo caso le cose andranno in questo modo: mentre  $k$  varia da  $a$  a  $y_{m, n}$  — questo estremo escluso — il numero di zeri è  $2n + 1$ ; diventa

$2n + 3$ , mentre  $k$  varia da  $y_{m, n}$  a  $y_{M, n}$  - estremi compresi - e torna a  $2n + 1$  per tutta la rimanente porzione del periodo.

Riassumendo, supposto sempre che  $(2n - 1)$  sia il massimo intero dispari per cui si abbia:

$$(2n - 1)\pi \leq y_{M, n} + a$$

se abbiamo:

$$\delta - \eta = y_{M, n} - y_{m, n} = 2y_{M, n} - (2n + 1)\pi \geq 0$$

avremo che il numero di zeri oscilla fra  $(2n + 1)$  e  $(2n + 3)$ . Raccogliendo insieme le due condizioni, risulta che questo caso si verifica allorchè si ha:

$$(8) \quad (2n - 1)\pi < y_{m, n} + a < (2n + 1)\pi \leq 2y_{M, n}$$

Concludendo, dall'analisi fatta si deduce che per trovare il numero di zeri voluto, dato  $a$ , basta calcolare l'ordinata del  $1^{\circ}$  massimo per mezzo della formula:

$$y'_{M, n} = a + a \cos \alpha = \arcsen \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - 1}$$

e formarsi i numeri  $(a + y_{M, n})/\pi$  e  $2y_{M, n}/\pi$ , allora se fra essi è compreso un certo intero dispari  $(2n + 1)$ , il numero degli zeri oscilla fra questo ed il suo dispari successivo, nella maniera descritta; in caso contrario, il numero cercato oscilla fra i due numeri interi successivi, che comprendono i due numeri calcolati.

In particolare nel caso in cui  $\frac{a + y_m}{\pi}$  fosse esso stesso intero dispari,  $(2n - 1)$ , il numero di zeri è  $2n + 1$  nell'intervallo  $(a, y_{M, n})$  diventa  $(2n - 1)$  nella rimanente parte del periodo; nel caso in cui  $2y_{M, n}/\pi$  fosse l'intero dispari  $(2n - 1)$  il numero cercato è costantemente  $(2n - 1)$  tranne che in un sol punto (per  $k = y_{M, n}$ ) in cui diventa  $2n + 1$ .

3) Volendo ora procedere al calcolo effettivo degli zeri dell'equazione:

$$(9) \quad y = x + a \cos x = k$$

dove  $k$  è sempre compreso fra  $a$  e  $a + 2\pi$ , possiamo assai utilmente avvalerci della proprietà espressa dalla relazione (3), che ci consente di ridurre la ricerca a quella dei punti d'intersezione di certe rette parallele all'asse  $x$ , *sempre col solo primo periodo della curva  $y(x)$*  <sup>(1)</sup>.

Per maggiore chiarezza supponiamo noti questi zeri, e disposti in ordine crescente: siano essi:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n+1}$$

(1) Occorre tenere in mente ben distinti fra loro questo *primo periodo della curva*, di cui stiamo parlando, dal *primo periodo della funzione  $y(x)$* .

Quello comprende infatti tutti i punti di cui la  $x$  cade fra  $0$  e  $2\pi$ ; mentre questo comprende tutti i punti di cui la  $y$  cade fra  $a$  e  $a + 2\pi$ , e può avere punti le cui  $x$  appartengono all'intervallo,  $0$  e  $(2n + 1)\pi$ .

ed osserviamo che di essi i primi tre, ovvero il 1° solo, appartengono al 1° periodo della curva, e ciò secondo che sia  $k \leq y_{m, 1}$  oppure  $k > y_{m, 1}$  e che i successivi, a due a due, appartengono ai periodi successivi.

Supposto dunque che i due zeri  $x_4$  ed  $x_5$ , appartengono al 2° periodo scriveremo:

$$x_4 = 2\pi + x_{4,0} \quad x_5 = 2\pi + x_{5,0}$$

Ma la (3) ci dice che:

$$y(x_4) = 2\pi + y(x_{4,0})$$

da cui essendo  $y(x_4) = k$  si trae:

$$y(x_{4,0}) = k - 2\pi$$

ed ugualmente:

$$y(x_{5,0}) = k - 2\pi$$

Queste ultime ci dicono che per trovare i due zeri  $x_4$  ed  $x_5$  basta condurre la retta di equazione  $y = k - 2\pi$ , e cercare i suoi punti d'intersezione col *primo periodo della curva*. Otteniamo così in fondo i valori angolari delle fasi,  $x_{4,0}$ ,  $x_{5,0}$ , per mezzo dei quali si hanno immediatamente i due valori cercati, sommandovi semplicemente il numero  $2\pi$ .

In modo perfettamente analogo troviamo, che per avere gli zeri  $x_6$ ,  $x_7$  basta condurre la retta  $y = k - 2 \cdot 2\pi$ , e cercare le ascisse delle intersezioni  $x_{6,0}$ ,  $x_{7,0}$  con il *solo primo periodo della curva*, ed aggiungere ad esse il numero  $2 \times 2\pi$ . e così di seguito.

In conclusione otterremo tutti gli zeri voluti, cercando i punti d'intersezione del *primo periodo della curva* con le rette di equazione:

$$\begin{aligned} y &= k \quad (1) \\ y &= k - 2\pi \\ y &= k - 2 \cdot 2\pi \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ y &= k - n \cdot 2\pi \end{aligned}$$

ed aggiungendo a queste fasi così trovate i corrispondenti multipli di  $2\pi$ , che figurano nel secondo membro delle (7).

Ridotta in questi termini la ricerca, il meglio che convenga fare per trovare le *fasi* desiderate è di costruirsi delle tavole in cui siano calcolati i valori presi dalla  $y$ , in corrispondenza di un certo insieme di valori attribuiti alla  $x$  e compresi nell'intervallo  $(0, 2\pi)$ .

Praticamente, la costruzione di tali tavole non è difficile, perchè basta prendere una comune tavola trigonometrica, moltiplicare i valori del coseno

---

(1) È evidente che se la prima dà luogo a tre punti d'intersezione l'ultima non ne potrà dare, se le radici sono  $2n + 1$ .



- di 30' in 30' - per la costante  $a$  ed aggiungere il valore dell'arco espresso in parti di raggio. Anzi, in vista dell'impiego della nostra funzione per fini astronomici, può essere utile la preparazione di un insieme di tabelle ausiliarie, contenenti i prodotti dei valori della funzione  $\cos x$ , per i successivi numeri naturali da 1 a 9, in modo da potere con il loro uso, facilmente calcolare il prodotto  $a \cos x$ , per qualunque valore di  $a$  dato; e quindi formarsi la tavola delle

$$v = a + \cos x$$

per il valore di  $a$  desiderato.

4) Passando al calcolo delle *curve di luce* previste dalla teoria balistica delle « variabili »; preferiamo di scegliere un esempio concreto che ci dà modo non solo di mostrare come si applichino in concreto le considerazioni esposte; ma di togliere un equivoco in cui io stesso sono incorso, a proposito della scelta del limite superiore a cui dovrebbe sottostare il prodotto  $Kb$ , perchè il fenomeno di variabilità sia ancora osservabile. Scegliamo dunque appositamente il caso in cui  $a = 10\pi$  e perciò  $Kb$  abbia quel valore 5 che nei precedenti scritti era stato riguardato, in base a considerazioni intuitive, come il limite per il quale la variabilità sarebbe scomparsa.

La relazione fra tempo di osservazione e tempo di partenza dei raggi della stella:

$$T = K \tau_0 + t + Kb \tau_0 \cos \omega t$$

diventa nel caso supposto:

$$y = x + 31,41592 \cos x$$

dove  $y = \omega (T - K \tau_0)$ ,  $x = \omega t$ .

Il primo massimo di  $y$  ha dunque luogo per il valore di  $x$  dato da:

$$\alpha = \arcsen \frac{1}{10\pi} = 1^\circ. 49'. 26'', 7.$$

ed il valore dell'ordinata  $y_{M,1}$  è 31.43205.

I numeri  $\frac{a + y_{M,1}}{\pi}$  e  $\frac{2y_{M,1}}{\pi}$  hanno per conseguenza i valori 20,0054 e 20,0108, i quali essendo entrambi compresi fra 19 e 21 ci dicono, che il numero delle posizioni distinte della stella, da cui giungono contemporaneamente raggi all'osservatore varia fra 19 e 21.

L'immagine complessiva vista dall'osservatore sarà, dunque, formata dalla sovrapposizione di queste 19 o 21 immagini elementari (poichè la distanza fra stella ed osservatore ed il raggio dell'orbita di questa non permettono la separazione di tali immagini) ed avrà un'intensità uguale alla somma delle intensità delle immagini elementari.

Volendo costruire per punti la curva di luce occorrerà dunque procedere in questo modo:

Fissare convenientemente un certo numero di valori di  $T$  (tempo di osservazione) cioè di  $y$  e siano questi  $y_0, y_1 \dots y_r$ .

Cercare, in corrispondenza di ciascuno di essi, p. es. di  $y_1$ , i valori  $x_{1j}$  che verificano l'equazione:

$$x + a \cos x = y_1$$

o meglio, le *fasi* corrispondenti, per mezzo delle equazioni  $x + a \cos x = y_1 - m 2\pi$ , ciò che si fa con l'aiuto della tavola preparata e nel modo già indicato. Siano

$$x_{10}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1, 2n+1}$$

i  $2n$  (o  $19$ ) numeri così trovati.

Si calcola allora, in corrispondenza di ciascuna di queste fasi, il valore assoluto della derivata  $\frac{dy}{dx}$ , poichè essa coincidendo con  $\frac{dT}{dt}$ , prende in ogni punto un valore che è *inversamente proporzionale* all'intensità luminosa dell'immagine parziale, e può dunque servirci alla misura di essa.

Prendendo dunque i valori inversi dei  $2n$  numeri  $y'$  ( $x_{1j}$ ) e sommandoli si ottiene un numero che è proporzionale all'intensità apparente dell'immagine osservata all'istante  $T_1$  dato dalla  $\omega (T_1 - k \tau_0) = y_1$ .

I calcoli, alquanto laboriosi, sono stati eseguiti dal dr. G. Petrucci, mio assistente, al quale rendo grazie e lode.

Eccone un saggio:

Preso come primo valore  $y_0$  di  $y$ , l'ampiezza stessa  $a = 31,41592\dots$  e perciò immaginando condotta una parallela all'asse  $x$ , dal primo punto di contatto della curva con la sponda superiore della striscia, si hanno come *fasi* dei punti d'incontro di essa con la curva i numeri seguenti:

	$x$	$J$	$x$	$J$	$x$	$J$
1° periodo	0°, 0' 0"	1	30° 38' 0"	1,0526	325° 24' 0"	0,0529
2° »			38° 51'	0,0540	310° 59'	0,0400
3° »			55° 19' 50"	0,0402	295° 45'	0,0342
4° »			68° 48'	0,0353	284° 1'	0,0318
5° »			81° 3' 30"	0,0333	272° 46'	0,0209
6° »			92° 57' 30"	0,0331	261° 38' 45"	0,0311
7° »			104° 58' 45"	0,0339	250° 10'	0,0328
8° »			117° 43'	0,0372	237° 51' 15"	0,0134
9° »			132° 20'	0,0450	223° 37'	0,0442
10° »			152° 12' 30"	0,0733	204° 0'.. 0"	0,0762

Trovati questi, abbiamo calcolato i valori assoluti di  $1/y'$ , che sono raccolti nell'unito specchietto. nelle colonne segnate  $J$  (intensità luminose parziali); e finalmente si calcola la *intensità totale osservata* all'istante  $T_0 = K\tau_0 + Kb \tau_0$  (che prenderemo come origine dei tempi  $T$ ). Nel caso riportato si vede che tale somma ha il valore 2,84. *Ossia in quell'istante,  $T = T_0$ , a cagione della supposta propagazione balistica della luce, la stella apparirà all'osservatore con*

*un'intensità 2,84 volte maggiore di quella che avrebbe dovuto presentare, se la luce si propagasse con velocità costante, o se la stella non girasse.*

Ed importa molto fare osservare che alla formazione di questa intensità totale, le 21 immagini parziali concorrono in misura assai diversa.

Vi concorrono in misura di gran lunga preponderante le prime due delle tre appartenenti al 1° periodo; precisamente la prima col valore 1, l'altra col valore 1,0526; mentre le 19 immagini rimanenti vi concorrono con *contributi poco differenti fra loro e dell'ordine di alcuni centesimi*; tanto che mentre le prime due da sole, portano all'intensità dell'immagine totale un contributo di 2,05; le 19 rimanenti prese insieme non raggiungono un contributo di 0,8!!

In questo stesso modo sono state calcolate le intensità che si presentano all'osservatore all'epoche, indicate nella 1<sup>a</sup> colonna dell'unito specchietto, epoche computate a partire dall'istante  $T_0$  sopraindicato, ed espresse in frazioni del periodo (cioè supposto  $\tau_0 = 1$ ).

	$J$	
0,000000	2,8411	
0,004838		massimo
0,013888	1,0035	
0,027776	0,7845	
0,035552	0,7842	
0,083333	0,7802	
0,250000	0,7656	
0,472222	0,7794	
0,486060	0,7818	
0,487500	2,1113	
0,49490		massimo
0,51388	1,48744	
0,52776	1,28407	
0,666717	0,97692	
0,83333	0,98390	
0,97222	1,28424	
0,98610	1,48110	
1,00000	2,84110	

Il procedimento, descritto urta contro una grave difficoltà, quando si applica alla valutazione dell'intensità in corrispondenza dei massimi della curva di luce (cioè quando come valori di  $k$  si scelgono le ordinate del 1° massimo e dell'ultimo minimo giacente a sinistra di  $2a$ ).

Infatti poichè fra la  $x_{11}$  figura allora l'ascissa del massimo (o del minimo) una delle  $y'$  viene zero, ciò che importa che alla corrispondente immagine elementare bisognerebbe attribuire un'intensità infinita. Apparirebbe in tal caso, molto più opportuno dedurre l'intensità di questa « immagine singolare » dal valore del rapporto  $\Delta y/\Delta x$  preso fuori del limite. Ma anche i numeri che si ottengono per tal via dipendono fortemente dal particolare valore che si at-

tribuisce al  $\Delta x$  (arbitrario); sicchè in mancanza di un criterio di scelta del  $\Delta x$ , non è possibile fare affidamento su nessuno di quelli che si possono calcolare.

Bisogna, dunque, per dedurre i valori dei massimi procedere differenzialmente.

Ed è senz'altro evidente che il criterio migliore è il seguente:

Disegnare graficamente la curva in base ai punti già trovati (ossia tracciarla priva dei massimi) e stabilire su di essa questi ultimi, pensando che l'area totale compresa fra la curva, l'asse delle  $x$  e le ordinate estreme, deve essere uguale al rettangolo che ha per lati il periodo e l'intensità effettiva ( $I$ ) della stella.

Ciò perchè le due aree rappresentano rispettivamente le quantità totali di luce che in un periodo deve giungere all'osservatore, nell'ipotesi balistica ed in quella ordinaria; quantità che debbono essere le stesse per evidenti esigenze energetiche (1° principio).

Applicando questo criterio al caso concreto in esame, abbiamo ottenuto come valori dei due massimi cercati i numeri 4,6 e 4,92.

In conclusione, malgrado il valore relativamente grande dato alla costante  $a$  ( $10\pi$ ) l'ipotesi balistica ci porta a prevedere una curva di luce, che, non solo presenta ancora assai netto il fenomeno di variabilità, ma che possiede i caratteri che detto fenomeno presenta in molti casi osservati.

La curva di luce prevista, (fig. II) presenta infatti due massimi assai spiccati estremamente bruschi nella fase di salita e di durata assai breve, separati da due minimi molto piatti, nei quali l'intensità luminosa si mantiene per lungo tempo quasi costante. L'ampiezza del mutamento nell'esempio calcolato è dell'ordine di 2 gradini nella scala della grandezza stellare e le sue fasi sono praticamente così distribuite:

Due lunghi intervalli in cui l'intensità è sensibilmente costante, con i valori che ha nei due minimi (0,78 e 0,92 rispettivamente), i quali intervalli prendono complessivamente i 60/100 del periodo; le due fasi di decrescenza che prendono i 20/100, quelle della lenta crescita per 15/100, ed i due massimi che evolvono quasi interamente nei rimanenti 5/100 del periodo; benchè la massima parte della salita al massimo e della discesa si compiano in un tempo estremamente breve.

I medesimi risultati si ritrovano quando alla costante  $a$  si attribuiscono valori molto più grandi, come ho potuto accertare con un calcolo di orientamento fatto per il caso  $a = 200\pi$ . Tutto ciò che si nota nella curva di luce è una minore durata dei massimi, ed un conseguente aumento della loro intensità. Possiamo, dunque, concludere che non esiste un limite superiore della costante  $a$  (e quindi di  $Kb$ ) oltre il quale il fenomeno di variabilità più non si presenta. Il dissidio fra la previsione della teoria balistica e le osservazioni citate da Bernheimer e Salet non è dunque essenziale; e si riduce ad una divergenza nella forma della curva di luce che può essere facilmente eliminata.

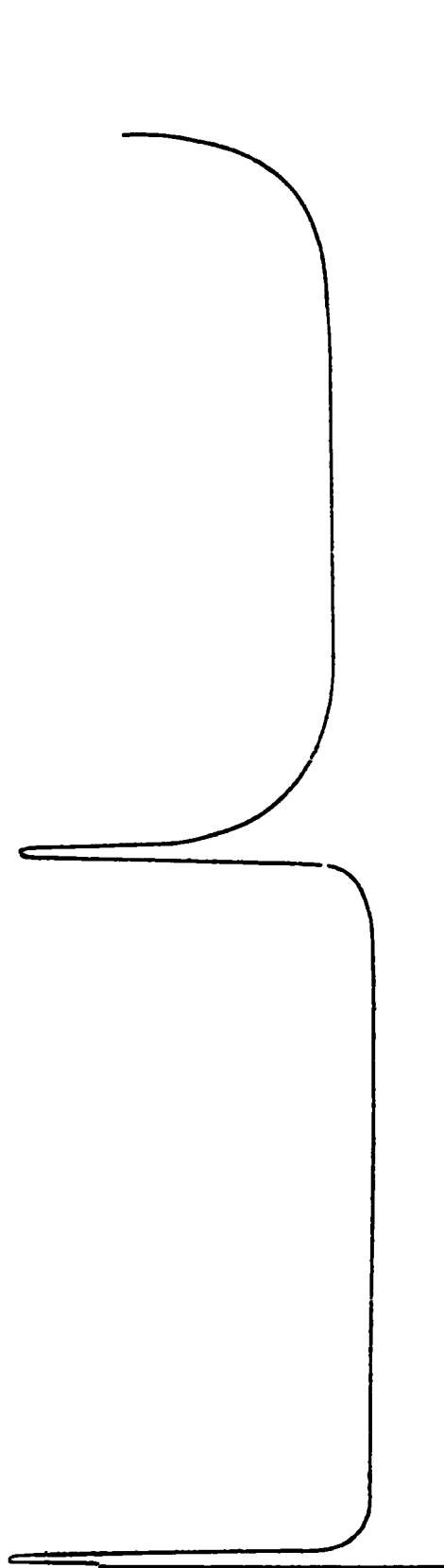


Fig. II.

I caratteri con cui si presenta il cambiamento di luce previsto dalla teoria balistica, per questi valori grandi di  $\alpha$ , non coincidono, infatti, con quelli delle variabili del tipo Algol, e seguono, invece, e molto da vicino, quelli che sono stati osservati nelle variabili del 3° gruppo, della classe IV della classificazione di Pickering, cioè del gruppo detto del « Clustertyp » (il quale è il più numeroso di tutti) e dalle variabili a lungo periodo della classe II-B della stessa classificazione (\*).

Da una memoria di J. J. Bailey (2) riportiamo qualche curva di luce di stelle appartenenti a quel tipo (fig. III), e riportiamo pure il seguente spec-

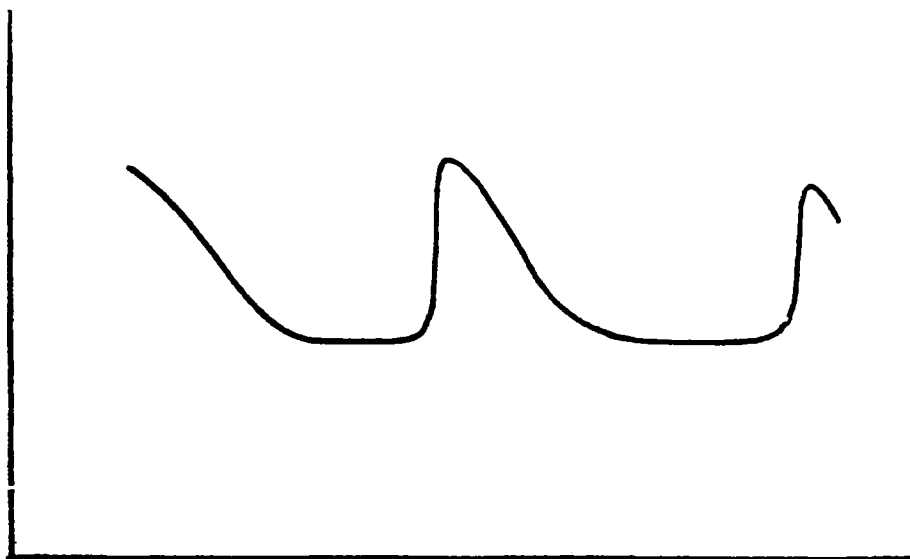


Fig. III.

chietto, in cui sono schematicamente rappresentate le fasi salienti osservate nel fenomeno di variabilità presentate da alcune stelle dell'ammasso Messier.

Durata della fase di massimo	0/100
» » » » minimo	40/100
» » » » decrescenza	50/100
» » » » crescita	10/100
	100/100

Questo e quella mostrano chiaramente il parallelismo di comportamento fra questi casi dell'osservazione e la curva dedotta teoricamente.

(\*) Cfr. K. Schiller: « Einführung in das Stud. der Verand. Sterne » A. Barth, Leipzig - 1923.

(2) Astr. Journ., vol. X, pag. 255 e 261 - 1899.

Caratteri analoghi possiede la curva di luce osservata per S S Cygni (fig. IV) (la più tipica e la più strana delle variabili della classe II-B di Pickering) che presenta pure due lunghi intervalli di costanza di luce (minimo) due massimi ad accensione quasi istantanea ecc. Ed è bene riflettere che la teoria balistica ha ancora in serbo buone riserve per potere più da vicino spiegare i fenomeni presentati da ciascuna delle variabili di questo importante e misterioso gruppo,



Fig. IV.

sfuggito fin'oggi a qualsiasi tentativo di spiegazione, e precisamente avvalendosi: 1° della scelta fatta nel modo più conveniente della costante  $a$ ; 2° dell'ellitticità dell'orbita (che noi per semplicità abbiamo supposto circolare); 3° della orientazione di questa rispetto alla visuale (angolo fra la linea dei nodi e la visuale). Ed appare possibile spiegare per questa via la durata differente dei due massimi, la differente rapidità delle due discese ecc.

*Palermo, R. Università.*

---