

ТЕОРЕМА НЁТЕР

Взгляд Физика

Николай Буянов

Торонто, Канада

Keywords: теорема Нётер, симметрия

Abstract: Связана ли симметрия с законом сохранения энергии?

1. Предисловие

Сегодня отчего-то захотелось разобраться с теоремой Нётер. Отношение к ней двоякое, кто-то утверждает, что это чистейшей воды тавтология, в то время как остальная часть ученого мира называет эту теорему величайшей теоремой всех времен и народов. Ну а как иначе? Ведь из такого, казалось бы незначительного свойства, как симметрия с неизбежностью вытекают все законы сохранения. На мой взгляд, к физике данная теорема отношения не имеет вовсе, какие-то группы, поля... Как правило, с любой физической теорией творятся очень странные вещи, когда мы уходим от твердой физической платформы к математическим абстракциям. Что-ж, бросим взгляд на теорему, постараясь помнить, что мы физики.

2. Теорема (Открытие №1)

А что, друзья, кто-нибудь теорему читал? Не слышу. Придется начать с самого начала. Я и сам ее не читал, пока не пришла в голову эта странная идея. Там даже с великолепным знанием математики не особенно-то разберешься со всеми этими полями и группами.

Все мы, конечно, слышали краем уха, что такая простая вещь, как симметрия нашего мира предопределяет законы сохранения. В частности, симметрия во времени является вполне достаточным условием для безусловного выполнения закона сохранения энергии, симметрия по координате – закон сохранения импульса и так далее. Вот на законе сохранения энергии мы и остановимся, вполне достаточно для начала. Математики постараюсь избежать.

Итак, читаем теорему, точнее ее частный случай, относящийся к симметрии во времени: «Если Лагранжиан системы симметричен относительно времени, то полная энергия системы сохраняется».

Вот мы и сделали наше первое открытие: оказывается, симметрия нашего физического мира совершенно ни при чем, речь идет о симметрии некой математической абстракции под названием Лагранжиан системы.

3. Симметрия (Открытие №2)

Кто первый ответит на вопрос – что такое симметрия? Все конечно изучали геометрию и прекрасно знают, что можно что-либо отразить зеркально относительно оси, повернуть, отразить через точку и так далее. А как насчет времени? Что такое симметрия по времени? Может быть знак поменять?

Все это неправильно. Мы ведь ведем речь не о здравом смысле, а о математике. Так вот, «Лагранжиан системы симметричен или инвариантен относительно времени, если он не меняет своего значения при подстановках $t \rightarrow t + \delta t$ ». Говоря простыми словами, какое бы время мы не подставили в формулу этого Лагранжиана, он не поменяет своей величины. Оказывается «симметрия» и «инвариантность» это синонимы в мире математики.

Справедливо это может быть только в единственном случае, а именно, если Лагранжиан системы есть величина не зависящая от времени, то есть константа.

Тут мне могут возразить, ну зачем сразу константа? Лагранжиан ведь может зависеть еще и от координат! Хорошо, если тело движется, то его координаты зависят от времени определенным образом. Следовательно и Лагранжиан также зависит от времени. Ситуация, когда тело никуда не движется мне совершенно понятна без всякой теоремы – кинетическая энергия равна нулю, потенциальная в кинетическую перейти не может, иначе система перестанет быть покоящейся.

Чем дальше, тем интереснее. Оказывается речь не идет ни о каком пространстве или «нашем мире». Мало того, симметрии оказывается никакой нет, по крайней мере в общепринятом значении этого слова. Есть просто Лагранжиан, величина которого постоянна.

4. Лагранжиан

Кажется, мы приближаемся к финальной стадии. Лагранжиан только этот непонятен.

Открываем учебник и видим, что Лагранжиан системы равен кинетической энергии данной системы минус ее потенциальная энергия:

$$L = T - V = \text{const} \quad (1)$$

В этом месте у меня лично возникает интересный вопрос – а в каких конкретно случаях Лагранжиан является константой, не зависящей от времени?

Все мы всосали с молоком матери, что общая энергия системы есть величина постоянная:

$$E = T + V = \text{const} \quad (2)$$

Как вы считаете, могут ли одновременно выполняться условия (1) и (2)?

Пусть в нашей движущейся системе часть потенциальной энергии (ΔE) перешла в кинетическую. Полная энергия, разумеется, останется без изменений. А что произойдет с Лагранжианом?

$$L = T + \Delta E - (V - \Delta E) = T - V + 2\Delta E$$

Таким образом, постоянство Лагранжиана просто-напросто означает отсутствие в системе подобных трансформаций энергии ($\Delta E=0$).

5. Заключение

Подводя итоги, мы можем перефразировать содержание теоремы Нётер (в случае симметрии во времени) следующим образом – «Если в системе отсутствует переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно, то кинетическая энергия системы сохраняется».

А можно немного по-другому – «Если кинетическая энергия системы неизменна, то она сохраняется».

Тавтология или нет – вам решать.

References: [1] Noether's theorem. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Noether%27s_theorem