

Аннотация

Кривые пустые пространства обладают свойствами линзы. Плоское пространство Евклида можно замкнуть процедурой отождествления с сохранением локальной евклидовой метрики, не наделяя его свойствами линзы. Отождествление дополнительных измерений в теории струн может устранить из неё многообразие Калаби-Яу и сократить ландшафт теории.

Ключевые слова

Изотропия, линзирование, затылок, изометричные поверхности, третий постулат Евклида, отождествление, склейка, трёхсторонний квадрат, триквadrat, трёхгранный куб, трикуб, двухосевой цилиндр, сферический цилиндр, трехмерный тор, двухсторонний квадрат, биквadrat

В космологии известно такое явление как гравитационное линзирование. Заключается оно в том, что пространство, искривлённое вблизи массивных тел, например, чёрных дыр, проявляет себя как линза. Свет, проходя через такую линзу, искривляется, фокусируется как от обычной стеклянной линзы.

Подобными же свойствами обладает и пустое пространство, без массивных тел, если это замкнутое искривленное пространство. Описание свойств таких пространств в литературе можно встретить довольно часто: сферическое пространство Римана, пространство постоянной отрицательной кривизны Лобачевского. Если пространство имеет положительную кривизну, то луч света, выпущенный в каком-либо направлении, через некоторое время вернётся к источнику с обратной стороны. Есть весьма красочное описание этого явления: в таком пространстве, как говорится, можно увидеть собственный затылок:

«виден с разных сторон и в разные моменты времени за счет того, что свет много раз успевает обойти такой замкнутый мир за время расширения» [3].

Как модель пространства космологической замкнутой Вселенной часто рассматривают надувной шарик (сферическое пространство). При его раздувании макеты галактик, наклеенные на его поверхности, отдаляются друг от друга, оставаясь всегда в одной и той же точке координатной сетки. Очевидно, что луч света, выпущенный в таком пространстве, опояшет его и вернётся в исходную точку. Луч света в пространстве - это прямая линия. Светоносной средой для сферы является её поверхность. Поэтому луч света, двигаясь по этому пространству, повторяет его контуры – сферу. Для этого условного луча света нет направлений внутрь и от сферы, он распространяется по ней вдоль линий больших кругов. Параллельные линии на сфере - это две большие окружности, проведённые через две рядом расположенные точки. Очевидно, что две такие параллельные линии пересекутся дважды. Отсюда следует, что все прямые линии, проведённые из одной точки, во-первых, пересекутся ещё раз, во-вторых, являются параллельными. Это один из примеров нарушения пятого постулата Евклида, в соответствии с которым, через точку можно провести только одну прямую, параллельную данной, то есть, не пересекающую её. В сферическом пространстве (положительной кривизны) таких прямых не существует.

Из приведённого описания можно заметить достаточно очевидную особенность такого пространства. Вопреки распространённому мнению, увидеть в таком пространстве свой затылок невозможно в принципе. Все лучи света, испущенные из точки, вернутся именно в эту точку. Это значит, что в какую бы область неба мы ни посмотрели, мы обязательно будем

видеть лучи света, «испущенные нашим затылком». Изображение его будет «размазано» по всей сфере небосвода или видимой его части. Понятно, что для этого в пространстве Вселенной не должно быть ни других мешающих источников света, ни его поглотителей.

Тем не менее, подобные «изображения затылка» всё-таки имеют характерное, довольно интересное свойство. Возьмём, например, фотопластинку и на её тыльной стороне поместим источники света в виде ярких точек. Подождём достаточно долго и посмотрим на лицевую сторону фотопластинки. На ней проявится точное изображение этих точек, каждое напротив своего источника, находящегося на тыльной стороне. То есть, мы сделали своеобразную фотокамеру, которая будто бы сфотографировала источники. Но у этой камеры нет ни линзы, ни тонкого обскурного отверстия. Изображение мы получили благодаря эффекту **пространственного линзирования**. В качестве линзы выступило само положительно искривлённое пространство. Этот эффект можно наблюдать только тогда, когда источник и фотопластинка находятся в одной точке пространства.

Если источник и приёмник находятся в разных точках пространства, то картина будет иной. Рассмотрим объект - стрелку А, находящуюся от экрана на расстоянии, много меньшем, чем длина окружности сферического мира. Очевидно, что лучи от точек источника не сойдутся в соответствующих точках на экране, поскольку они не диаметрально противоположные. Все лучи от точек объекта А будут распространяться в сторону экрана не по евклидовым параллельным линиям, а по дугам больших окружностей сферы. Поставим перед экраном обычную оптическую линзу О. Если пространство обычное, евклидово, то объект А отобразится на экране в изображение В. Если же это пространство имеет сферическую кривизну, то такое же изображение В будет эквивалентно изображению от объекта А':

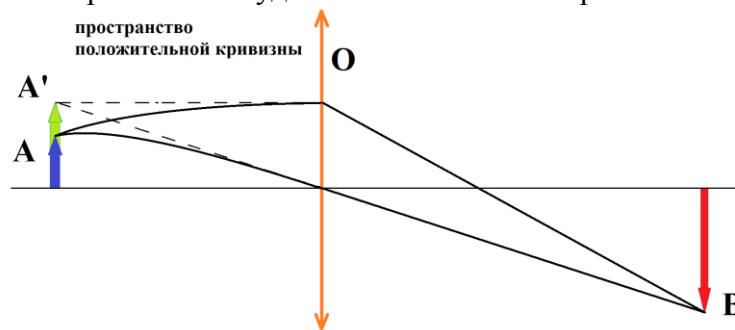


Рис.1. Пространственная увеличивающая линза

Физически объект А меньше объекта А', дающего такое же изображение В. То есть, как видно из рисунка, сферическая искривлённость пространства (пространство поверхности сферы) увеличивает изображение удалённого объекта. Точно также, если трехмерное пространство Вселенной замкнутое, сферическое, то все объекты во Вселенной, удалённые от нас, мы будем видеть увеличенными. Чем сильнее искривлено пространство, тем сильнее будет увеличение.

Такая картина будет в пространстве положительной кривизны. Но тогда возникает естественный вопрос, а каким будет изображение в пространстве отрицательной кривизны? Легко догадаться: если в плоском пространстве мы получаем неискаженное изображение, а в пространстве с положительной кривизной - увеличенное, то в пространстве отрицательной кривизны мы должны получить изображение уменьшенное. В пространстве отрицательной кривизны лучи света от источника расходятся, как показано на рисунке:

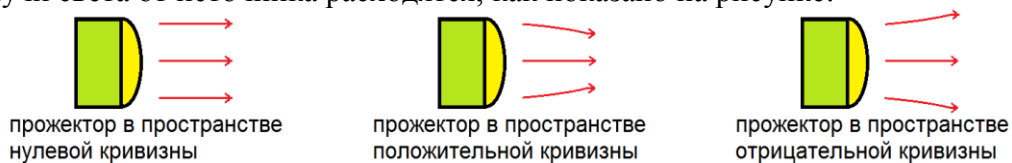


Рис.2. Направления лучей света прожекторов в различных пространствах

Каждый из прожекторов испускает поток параллельных лучей света. Но в пространстве положительной кривизны (сферический мир Римана) эти «параллельные» лучи на удалении сходятся, а в пространстве отрицательной кривизны (мир Лобачевского) эти «параллельные»

лучи света расходятся. С учетом такого поведения «параллельных» линий в пространстве отрицательной кривизны, рассмотренный нами выше объект по сравнению с плоским пространством отобразится на экране уменьшенным:

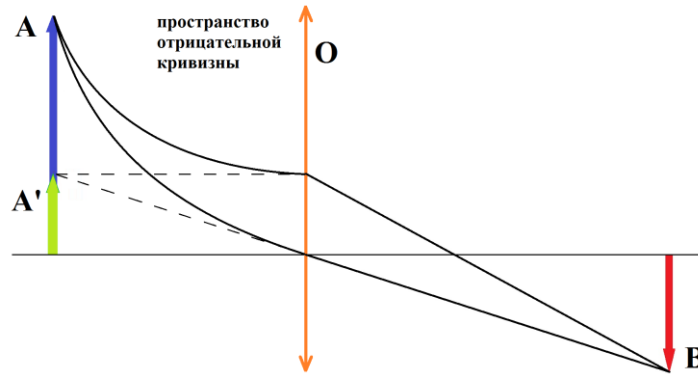


Рис.3. Пространственная рассеивающая линза

На рисунке объект A' - это источник в плоском пространстве, видимый через оптическую линзу O как изображение B . Такое же изображение B в искривленном пространстве отрицательной кривизны будет получено от объекта A , который больше объекта A' . Следовательно, пространство отрицательной кривизны обладает свойствами рассеивающей линзы.

Замкнутые пространства Евклида

Очевидно, что эффекты пространственного линзирования и возможность увидеть свой затылок присущи только замкнутым пространствам. В случае двухмерного пространства этим свойством обладают, например, такие хорошо известные поверхности: сфера, псевдосфера Бельтрами, тор, цилиндр, конус. Все эти поверхности не являются плоскостями Евклида. Очевидно, что изначально геометрия Евклида создавалась как геометрия плоского изотропного мира, хотя явно это не указано. Ни о какой замкнутости евклидова пространства не было и речи. Впоследствии основные её положения (с существенными изменениями) довольно успешно были перенесены на замкнутые искривлённые сферическое и гиперболическое пространства. Однако, известно, что и сама геометрия Евклида имеет свой собственный евклидов замкнутый мир. Свернём, к примеру, в цилиндр лист с нарисованными параллельными прямыми. На поверхности цилиндра определение параллельности останется верным. Прямые теперь стали геодезическими, но они в точности повторяют все свойства плоских прямых линий Евклида. «Замыкание» в кривое евклидово пространство без пересечения может быть осуществлено сворачиванием плоскости Евклида только в цилиндр или в конус. Эти поверхности являются изометричными по отношению к обычной плоскости Евклида:

«Изометричные поверхности — поверхности в евклидовом или римановом пространстве такие, что между ними можно установить взаимно однозначное точечное соответствие, при котором каждая спрямляемая кривая одной из поверхностей имеет своим образом тоже спрямляемую кривую и той же длины» [2].

На то, что геометрия на поверхностях конуса или цилиндра сохраняет свойства геометрии на плоскости Евклида, обращали внимание, например, Риман:

«цилиндрические или конические поверхности существенно не отличны от плоскости, так как могут быть получены из плоскости посредством одного лишь изгибания, причем внутренние метрические отношения остаются неизменными и все теоремы, касающиеся этих отношений, то есть вся планиметрия, остаются в силе» [6].

На это указывал и Рашевский:

«Термин «изгибание» связан с наглядным представлением о поверхности как о гибкой, но нерастяжимой и несжимаемой пленке; такую пленку можно изгибать в пространстве, меняя ее форму, но сохраняя длины всех кривых на ней. Примером может служить сворачивание плоского листа бумаги в цилиндр или конус» [4].

Однако, следует уточнить, что эти пространства являются пространствами Евклида лишь

локально, ограниченно. На конусе (если угол сегмента развертки меньше π) и цилиндре нарушается третий постулат Евклида [1, 6]:

«3. И что из всякого центра и всяким раствором <может быть> описан круг».

Нарушение третьего постулата автоматически ведёт к другим ограничениям. Например, на цилиндре существуют замкнутые «прямые», что является нарушением постулата о неограниченном продлении прямой: если идти по этой прямой линии, то придёшь в исходную точку. Две пересекающиеся прямые на цилиндрической поверхности при неограниченном продлении имеют неограниченное число точек пересечения. Это означает, что внутренние наблюдатели могут экспериментально определить замкнутость своего мира. Например, два путешественника будут периодически встречаться, если один идёт перпендикулярно к замкнутой координате (то есть, вдоль оси цилиндра), а второй - не параллельно к ней в одну сторону с первым (то есть, по винтовой линии). Если они оставляют след, то эти следы будут периодически пересекаться. В кривом цилиндрическом мире Евклида можно увидеть свой затылок. На рисунке показаны несколько разверток одного и того же цилиндра, приложенных друг к другу для наглядности:

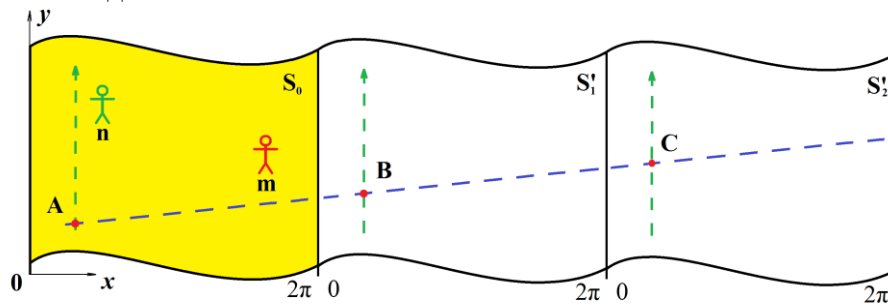


Рис.4. Развертка цилиндрической поверхности S_0 . Для наглядности по горизонтали показаны приложенные встык друг к другу несколько разверток - S_1, S_2 . Ось y - направление оси цилиндра.

На поверхности цилиндра две параллельные прямые могут иметь множество совпадающих точек, сливаясь, что нарушает аксиому Гильберта I_2 группы принадлежности «Каковы бы ни были две точки A и B , существует не более одной прямой, проходящей через эти точки»:

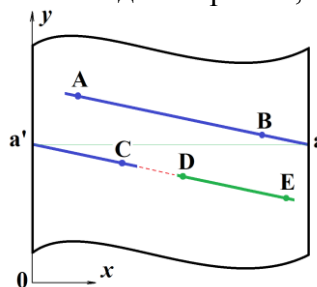


Рис.5. Развертка цилиндрической поверхности. Параллельные прямые пересекаются. Ось y - направление оси цилиндра.

Показана развертка цилиндра (ось цилиндра - вертикальна). Параллельно прямой AB проведена прямая DE . Прямая AB продолжена до точки C и проходит под углом к оси цилиндра (не замкнута). Видно, что при дальнейшем её продолжении она сольётся с прямой DE .

Таким же локально евклидовым пространством является и конус: на конической поверхности существуют, по меньшей мере, две прямые линии, которые при неограниченном продлении пересекаются в двух точках; могут существовать прямые линии, которые самопересекаются и, следовательно, параллельные пересекающиеся прямые. Конус образуется из плоскости Евклида склейкой двух сторон угла и сворачиванием куска плоскости. На следующем рисунке показана развёртка конической поверхности. Как и в примере с цилиндром на одном рисунке показаны совмещённые встык четыре одинаковые развертки кривого конического пространства - конуса AoB :

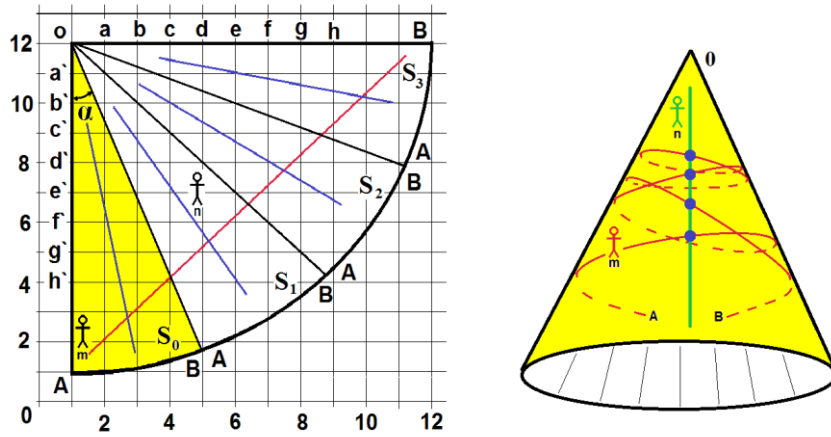


Рис.6. Развертка конической поверхности S_0 . Для наглядности по горизонтали показаны приложенные встык друг к другу несколько дополнительных разверток S_1, S_2, S_3 . АВ - линия окружности основания конуса. Справа: траектории движения внутренних наблюдателей по поверхности конуса.

В коническом мире траектории движения внутренних наблюдателей - двух путников m и n будут пересекаться с увеличивающейся периодичностью (всё реже), если один из них - n идёт от вершины конуса (по образующей), а другой - m идёт мимо вершины, то приближаясь по кривой к вершине, если смотреть извне, то удаляясь от неё, но на самом деле, всегда двигаясь строго по прямой на развёртке конусной поверхности.

В зависимости от угла развертки конического мира (угла сегмента $AoB = \alpha$) они могут быть шовными и бесшовными. Бесшовный конический мир может быть образован только сегментами с углами α , кратными $\pi/2$. Если $\alpha = 2\pi$, образуется обычный плоский мир Евклида; если $\alpha > 2\pi$, образуется спиральный конический самопересекающийся мир. На рисунке слева изображен конический бесшовный мир с минимально возможным углом $\alpha = \pi/2$:

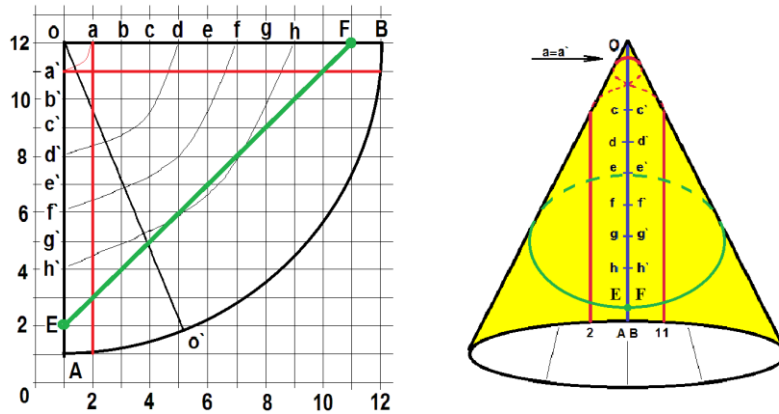


Рис.7. Простейший конический бесшовный мир.

Это наименьший конический бесшовный замкнутый мир. Он образуется сворачиванием сегмента AoB в конус, в результате чего при склейке границ плоскости точки $aa', bb' \dots hh'$ совместятся друг с другом. Как видно из рисунка, в этом случае на поверхности конуса соответствующие квадраты поверхности ровно стыкуются своими сторонами, неразрывно переходя друг в друга, поэтому на поверхности конуса все элементарные ячейки будут в точности квадратными, равными в развёртке друг другу. Если взять сегмент, с углом α , не кратным $\pi/2$, например, Aoo' , то точки $a' \dots h'$ не совместятся с аналогичными точками на другом радиусе сегмента. Два радиуса Ao и oo' окажутся со смещёнными вдоль радиуса квадратами поверхности, образуя шов $Ao=oo'$.

На рисунке видно, что на этом сегменте можно провести прямую линию EF , которая пересечёт оба его радиуса oA и oB . Это означает, что на поверхности образовавшегося конуса будет замкнутая или спиральная евклидова прямая линия. Обращаю на это особое внимание: это настоящая прямая евклидова линия, которая сама себя пересекает, не имея при этом ни

изломов, ни перегибов! На конической поверхности при склейке образуется трёхсторонний квадрат - квадрат, у которого отождествлены, склеены две рядом расположенные стороны:

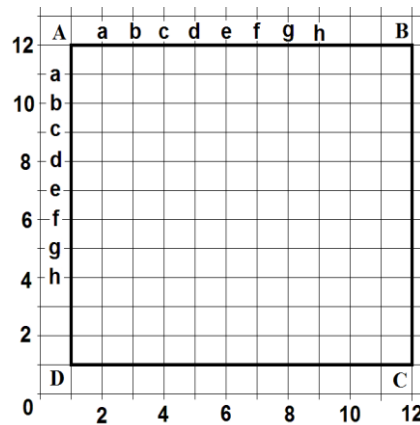


Рис.8. При склейке сторон АВ и AD образуется трёхсторонний квадрат

Сторона АВ - это тождественно сторона AD, что показывают одинаковые обозначения точек a...h на них. Поэтому у этого квадрата три стороны: $AB=AD$, BC и CD (трикватрат). Периметр трикватрата, таким образом, равен утроенной длине его стороны, но площадь равна квадрату стороны. На конусе прямые самопересекаются, следовательно, пересекаются и параллельные:

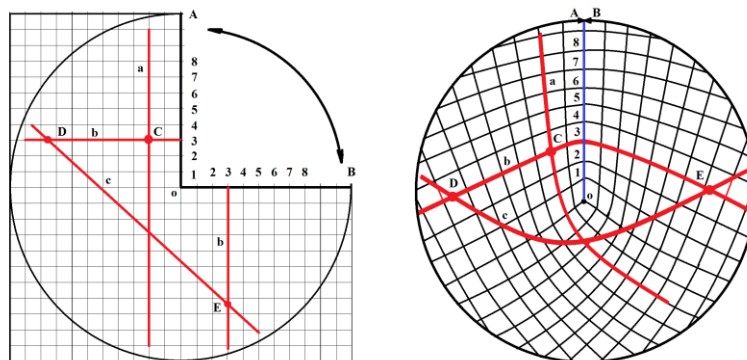


Рис.9. На конической поверхности прямые пересекаются в двух точках

Цилиндр и конус являются недеформированными поверхностями и образованы склейкой плоскости Евклида в одном из направлений. Осуществить склейку плоскости Евклида таким образом, чтобы получилось недеформированное пространство, замкнутое по всем направлениям (координатам), невозможно:

«если отождествить в квадрате точки каждой стороны с соответствующими точками противоположной стороны, то квадрат «склеится» в двумерное многообразие, устроенное наподобие тора. При этом все четыре вершины склеятся в одну точку, в которой сойдутся все четыре угла квадрата. Если сохранить в этом многообразии прежнюю метрику, то мы получим пример локально евклидова пространства двух измерений (разумеется, это пространство придется рассматривать абстрактно, не пытаясь реализовать его в виде тора в обычном пространстве: в последнем случае метрика не может быть локально евклидовой)» [5].

Если склеить, отождествить противоположные стороны квадрата, то на полученной поверхности будут выполняться все положения геометрии Евклида, кроме тех, которые связаны с неограниченным продолжением линий (фигур). Если размеры такой линии (фигуры) превысят размеры квадрата, будут нарушены положения параллельности, единственности линии, отсутствия выделенных направлений и других. Такой «склеенный квадрат», таким образом, как бы имеет только две стороны (бикватрат). Способ его образования позволяет назвать его также своеобразным цилиндром: сферическим (стягивание в одну точку углов) или двухосевым (скручивание по двум осям). Выделенные направления - это поперечные, диагональные и спиральные. Несмотря на анизотропию, то есть наличие выделенных

направлений, на такой замкнутой плоскости выполняются все законы евклидовой геометрии (с учетом ограниченности длин прямых), при этом вследствие её замкнутости, можно увидеть собственный затылок, причём в бесконечном количестве направлений.

На рисунке показана фигура - треугольник, который имеет линейные размеры, превышающие сторону квадрата ABCD. В зависимости от ориентации и положения этой фигуры, видимость её в пространстве различна:

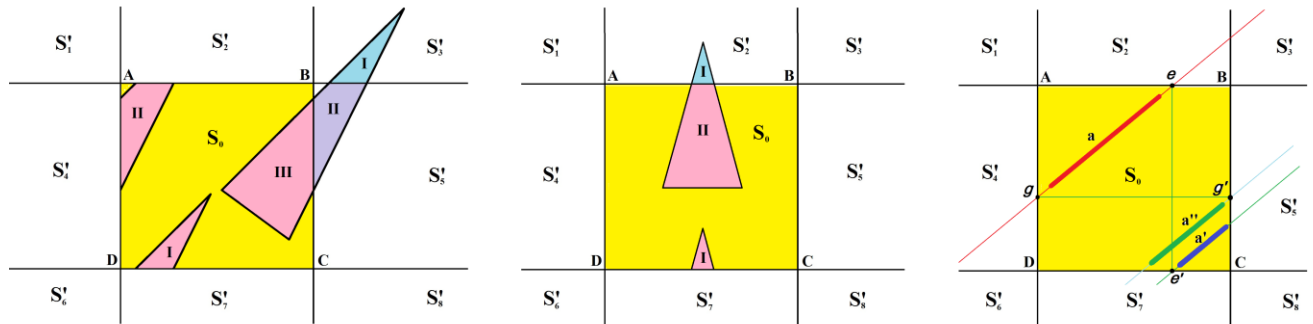


Рис.10. Плоскость ABCD, склеенная по двум координатам (показана развертка S_0 , повторенная многократно встык $S_1...S_8$). Изобразить трехмерную модель этого пространства невозможно, это своеобразный «сферический цилиндр».

Такая фигура может быть видна одновременно с двух сторон: спереди и сзади. Симметрия частей различна в зависимости от направления оси фигуры: либо скошенно как элементы I-II-III (левая часть рисунка), либо на одной оси как элементы I-II (средняя часть рисунка). Любая линия при неограниченном продлении может появиться с противоположной стороны, параллельно самой себе. На правой части рисунка линия a , неограниченно продлённая вперёд, появляется в пространстве как линия a' , а продлённая назад - как линия a'' . Точки $e - e'$ и $g - g'$ являются отождествлёнными точками на сторонах квадрата ABCD.

Цилиндрический и конический миры Евклида, видимо, являются единственно возможными двухмерными плоскими замкнутыми мирами, которые локально обладают всеми свойствами плоского мира Евклида. Выводы, полученные при их рассмотрении, можно распространить по аналогии и на трехмерное замкнутое пространство. В литературе очень часто наш реальный физический мир изображают графически в виде сферы. На самом деле трехмерная сфера может находиться только в пространстве четырёх измерений (не считая времени). Изобразить её в аксонометрии невозможно, поэтому и прибегают к упрощениям в виде двухмерной сферы в трехмерном пространстве. Это частный случай кривого трехмерного пространства - изотропное замкнутое пространство.

По аналогии с двухмерным пространством (поверхностью) мы можем «свернуть», замкнуть координаты трёхмерного пространства в окружности, отождествить противоположные грани трёхмерного куба, получив так называемый «трёхмерный тор» или трёхсторонний куб - трикуб. Графически изобразить такое замкнутое пространство невозможно. Очевидно, что полученный замкнутый мир является анизотропным - в нём появляются выделенные направления. В этом мире любой луч света вернётся в исходную точку, в нём можно увидеть свой затылок. Анизотропия направлений проявляется в том, что диагональные направления будут более длинными, чем по координатам. Такой неявно представляют структуру нашей Вселенной: с одной стороны она считается евклидовой, а с другой - замкнутой. Известны безуспешные попытки найти в ней «духов» - повторные изображения галактик, увидеть свой затылок.

Описание замкнутых евклидовых пространств, как показано, основано на двух принципиально отличных приёмах: склейки и отождествления. Метод склейки, видимо, следует считать физическим приёмом, а метод отождествления - математическим. Это значит, что склейка плоскостей или пространств в итоге даёт физический объект, который можно, например, изготовить в виде макета, объекта, который может реально существовать. Например, склейка ленты Мёбиуса может быть произведена, так сказать, на рабочем столе. Склейка конуса, цилиндра - реальные физические процедуры. Напротив, отождествление - это метод исключительно математический, который не обязательно позволяет создать физический, материальный объект. Например, отождествление точек на сфере образует эллиптическое

пространство Римана, которое, если и можно представить, то изготовить в виде макета не представляется возможным. Отождествление сторон квадрата невозможно не только повторить на макете, но даже и представить сложно. Тем более, отождествление граней куба. Однако, как математические модели - они в высшей степени удобны и интересны. Очевидно, математическое описание их не имеет никаких принципиальных трудностей.

Принимая во внимание эти доводы, следует усомниться в возможности наличия у Вселенной двух исключаяющих друг друга свойств: евклидовой метрики и замкнутости. Если Вселенная замкнута, то у неё не может быть евклидовой метрики, поскольку невозможно представить себе «отождествление» граней Вселенной. Напротив, если допустить такую возможность: физичность процедуры «отождествления» точек пространства, то следует распространить эту процедуру и на другие физические теории. Например, на теорию струн.

Многообразия Калаби-Яу

С 19-го века в физике живёт и активно обсуждается идея создания так называемой Теории Всего. Альберт Эйнштейн уделял ей большое внимание, посвятив большую часть своей жизни попыткам создания такой теории. Сейчас под нею подразумевают объединённую физико-математическую теорию, описывающую все известные на сегодняшний день фундаментальные взаимодействия: гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое ядерные взаимодействия. На этом пути встретилось множество трудностей. Например, выяснилось, что ведущие физические теории - квантовая механика и теория относительности несовместимы на микроскопическом уровне. Во второй половине 20-го века возникла новая физико-математическая теория - теория струн, которая позволяла изначально объединить все фундаментальные взаимодействия, претендуя тем самым на роль Теории Всего. Но с самого своего возникновения теория струн для корректного описания свойств частиц требовала использования от 10 до 26 измерений. Последняя на сегодняшний день версия теории суперструн – М-теория требует, по меньшей мере, наличия у пространства 7 дополнительных измерений, то есть, всего 11 измерений, в том числе, 10 – пространственных измерений и одно временное. Поскольку в реальности мы никогда не наблюдали более трёх пространственных измерений, в теории суперструн производится так называемая компактификация, то есть свёртывание «лишних» пространственных измерений в своеобразные кольца. Размеры этих колец чрезвычайно малы, поэтому никакими современными приборами измерить, увидеть их невозможно.

Свернуть в кольца 7 дополнительных измерений можно различными способами. Например, 2 измерения можно свернуть в сферу или в тор. Если добавить третье измерение, то при свёртке трёх измерений получится пространство, представить которое крайне затруднительно. Кроме того, свернуть эти пространства можно ещё большим количеством способов. Для 7 измерений способов свернуть пространство несопоставимо больше, а изобразить их графически вообще невозможно. То, что в интернете выдаётся за многомерное свёрнутое пространство – многообразие Калаби-Яу, на самом деле является трёхмерным объектом:

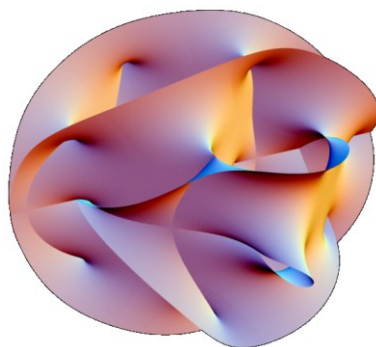


Рис.11. Трёхмерная визуализация многообразия Калаби-Яу

Как видно на рисунке, такое тело достаточно просто нарисовать и даже изготовить, например, из пластилина. Считается, что число вариантов струнных теорий в М-теории,

приводящих к приемлемым в разной степени результатам, превышает 10^{500} . Вместе с тем, существует рассмотренный выше способ отождествления. Если допустить физичность этой процедуры - отождествления, то можно осуществить отождествление крайних точек каждого из дополнительных измерений, вместо «сворачивания» их в окружности. При этом полученное многомерное пространство будет тождественно многомерному плоскому евклидову пространству, с учетом особенностей неограниченного продления линий. Такая компактификация «лишних» измерений в теории струн через отождествление, видимо, имеет единственный вариант и не требует столь сложных многообразий, как Калаби-Яу. В результате количество струнных решений М-теории, «ландшафт теории» может существенно сократиться.

04.01.2013

Литература

1. «Начала Евклида», книги I-VI, перевод с греческого и комментарии Д.Д.Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я.Выгодского и И.Н.Веселовского, //Серия «Классики естествознания». Математика, Механика, Физика, Астрономия. ОГИЗ Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва-Ленинград, 1948 год.
2. Википедия. Изометричные поверхности, URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Изометричные_поверхности (Дата доступа 04.12.2015)
3. Новиков И.Д., Эволюция Вселенной, - Москва: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1979.
4. Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии. - 3-е издание. - М.: ГИТТЛ, 1950.
5. Рашевский П.К., Риманова геометрия и тензорный анализ. – М., «Наука», 1967.
6. Риман Б., О гипотезах, лежащих в основании геометрии (С комментарием Г. Вейля.) Пер. с немецкого В. Л. Гончарова //Классики естествознания - Математика, Механика, Физика, Астрономия. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей. - М.: ГИТТЛ, 1956.
7. Путенихин П.В., Тайна третьего постулата Евклида, 2012, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/postulat.shtml (дата обращения 04.12.2015)